

РУБРИКА: ИНЖЕНЕРНАЯ И РУДНАЯ ГЕОФИЗИКА

Применение матричной декомпозиции для построения аналитических моделей аномалий силы тяжести

Долгаль А.С. («ГИ УрО РАН»)

Рассмотрено применение матричной декомпозиции для построения аналитических моделей региональных аномалий силы тяжести с помощью точечных масс на сферообразной Земле. Размещение точечных масс осуществляется на двух уровнях глубин. Разложение Холецкого, SVD и QR-разложения эффективно используются при решении систем линейных алгебраических уравнений в процессе истокообразной аппроксимации. Представлен пример моделирования гравитационного поля в редукции Буге для территории Сибирской платформы размером около 5 млн. кв. км с координатами 52° – 72° с.ш., 84° – 132° в.д.

Гравитационное поле, аномалии Буге, аналитическая модель поля, точечные массы, система линейных уравнений, разложение Холецкого, сингулярное разложение, QR-разложение, регуляризация, Арктика, Антарктика

Application of matrix decomposition to construct analytical models of gravity anomalies

Dolgal A.S. («MI UB RAS»)

The application of matrix decomposition to constructing analytical models of regional gravity anomalies using point masses on a spherical Earth is considered. The point masses are placed at two depth levels. The Cholesky, SVD, and QR decompositions are effectively used to solve systems of linear algebraic equations in the process of sourcewise approximation. An example of modeling the gravity field in the Bouguer reduction is presented for the territory of the Siberian Platform, approximately 5 million square kilometers in size, with coordinates 52° – 72° N, 84° – 132° E.

Gravity field, Bouguer anomalies, analytical field model, point masses, system of linear equations, Cholesky decomposition, singular value decomposition, QR decomposition, regularization, Arctic, Antarctica

Введение

Под аналитической моделью аномалий силы тяжести Δg в данном случае подразумевается множество параметров сеточной модели эквивалентных источников (точечных масс), порождающих модельное гравитационное поле Δg_T , весьма близкое наблюдаемому полю $\|\Delta g - \Delta g_T\| \leq \varepsilon$, где

величина ε определяется предполагаемой нормой помех δ , $\delta = \|\varepsilon\|$. В это множество входят геометрические и физические параметры, т.е. априорно заданные координаты размещения источников и значения их масс, соответственно. Будем рассматривать моделирование аномалий силы тяжести в редукции Буге на фрагменте сферообразной Земле. По классификации В.Н. Страхова, речь пойдет о региональном варианте линейных аналитических аппроксимаций, который применяется для сравнительно больших территорий размером 10^5 – 10^6 км² и более [18]. В этом случае в качестве модели Земли используется сфера Каврайского, для расчетов выполняется переход от геодезических координат (широты B и долготы L) к сферическим координатам $\sum \varphi \lambda R$, а аномалии силы тяжести Δg отождествляются с 1-й радиальной производной гравитационного потенциала V_R [7].

Значения аппроксимирующих масс \mathbf{m} определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{V}_R, \quad (1)$$

где \mathbf{G} – квадратная матрица значений гравитационных эффектов V_R для точечного источника с единичной массой ($m = 1$), \mathbf{V}_R – вектор наблюдаемых аномалий силы тяжести.

Если при решении практических задач порядок СЛАУ (1) составляет $N \cong (1-5) \times 10^4$ и менее, то для ее решения можно отказаться использования приближенных итерационных методов [1] и перейти к алгоритмам, основанным на матричной декомпозиции [13]. Этот вариант достаточно часто возникает при работе с глобальными моделями гравитационного поля Земли [12, 14], разрешающая способность которых ограничивает число независимых значений аномалий силы тяжести в пределах изучаемых территорий. Далее будет рассмотрено применение разложения Холецкого, QR-разложения и сингулярного разложения (SVD - singular values decomposition) в процессе истокообразной аппроксимации региональных гравитационных аномалий V_R в редукции Буге. Суть данного подхода заключается в представлении матрицы \mathbf{G} в виде произведения двух и более матриц, обладающих определенными свойствами (ортогональностью, симметричностью, диагональностью), облегчающими решение задачи (1).

Методы разложения матриц

Методы матричной декомпозиции по мнению, высказанному в журнале SIAM Review в 2000 г, входят в список из 10 алгоритмов, оказавших наибольшее влияние на науку и индустрию в XX веке. Фундаментальные работы по этой проблеме были опубликованы учеными из США Полом Дуайером (Paul Dwyer) и Альстоном Скоттом Хаусхолдером (Alston Scott Householder) в 1951 и 1954 гг. Далее рассмотрим 3 способа факторизации

матриц: разложение Холецкого, QR-разложение и сингулярное разложение.

Разложение Холецкого, позволяет представить положительно определенную симметричную матрицу коэффициентов нормальной системы уравнений в виде произведения левой и правой треугольных матриц $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, где \mathbf{L} - нижняя треугольная матрица со строго положительными элементами главной диагонали. QR-разложение – это представление невырожденной матрицы \mathbf{G} в виде $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathbf{R}$, где \mathbf{Q} — ортогональная матрица ($\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$), а \mathbf{R} — верхняя треугольная матрица [13]. QR – разложение выполняется с сохранением нормы Фробениуса исходной матрицы. Это является его преимуществом по сравнению с классическим подходом в методе наименьших квадратов, где требуется решение нормальной СЛАУ вида $\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \mathbf{V}_R$. Число обусловленности матрицы коэффициентов такой системы достаточно велико: $cond \mathbf{G}^T \mathbf{G} \approx cond^2 \mathbf{G}$.

Сингулярное разложение (Singular Values Decomposition, SVD) – позволяет представить матрицу \mathbf{G} размером $k \times k$ в виде, представленном на рис. 1

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad (2)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{V} – ортогональные матрицы ($\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$, $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$), $\mathbf{S} = \{\delta_{ii}\}$ – диагональная матрица с элементами δ_i ($\delta_i \geq \delta_{i+1}$), которые называются сингулярными числами матрицы [13].

Первый в нашей стране опыт применения сингулярного разложения для факторного анализа петрофизических данных и решения линейной обратной задачи гравиразведки был представлен в монографии [5]. Метод SVD успешно используется при анализе данных сейсморазведки [17, 6], гравиразведки [11], электроразведки [10] и комплексной интерпретации геофизических материалов [2].

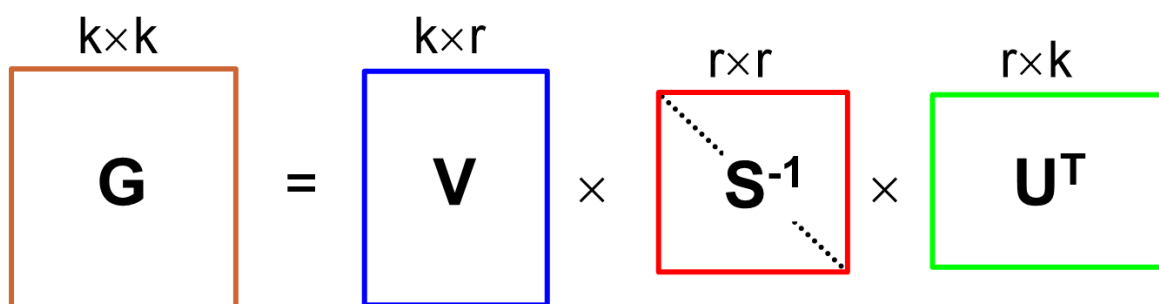


Рисунок 1. Схема SVD квадратной матрицы коэффициентов СЛАУ при $r < k$.

Выполнив замену переменных $\mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{m}$, при умножении СЛАУ (1) слева на матрицу \mathbf{U}^T получаем эквивалентную систему уравнений:

$$\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{U}^T \mathbf{V}_R. \quad (3)$$

Чтобы обеспечить устойчивое решение СЛАУ достаточно вычислять только $r < k$ диагональных элементов матрицы \mathbf{S} , соответствующих числу наибольших сингулярных чисел $\delta_r > \delta_{min}$, где δ_{min} – выбранное пороговое значение. Таким образом реализуется т.н. усеченный метод SVD (Truncated Singular Values Decomposition, TSVD), широко использующийся при сжатию изображений [13]. Обоснованный выбор параметра γ в TSVD обеспечивает устойчивое приближенное регуляризованное решение СЛАУ (3), однако формализовать этот выбор весьма затруднительно.

Можно также использовать другой, редко применяющийся, вариант регуляризации SVD, предложенный в работе [4]. Суть его заключается в переходе от СЛАУ (3) к нормальной системе уравнений, которая всегда разрешима:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{S}^T \mathbf{d}. \quad (4)$$

Для нее применима регуляризация в виде:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}\mathbf{z} + \alpha \mathbf{z} = \mathbf{S}^T \mathbf{d}, \quad (5)$$

что позволяет выбирать параметр регуляризации α известными способами, в зависимости от априорной информации о погрешности исходных данных [19]. В случае работы со спутниковыми данными можно опираться на величину невязки $\|\mathbf{V}_R - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{L^2} \cong (1 - 2)$ мГал, при использовании материалов аэрогравиметрических или наземных точность регуляризованного решения СЛАУ (5) должна быть сопоставима со среднеквадратической погрешностью определения аномалий в редукции Буге.

Построение аналитической модели гравитационного поля Сибирской платформы

При построении аналитической модели поля важную роль играет пространственное размещение масс: установлено, что разные варианты расположения эквивалентных источников, одинаково хорошо аппроксимирующие аномалии силы тяжести на поверхности Земли, могут генерировать заметно различающиеся между собой значения трансформант. Это объясняется использованием интеграла Пуассона для решения внешней задачи Дирихле при конечных пределах области интегрирования D и дискретном характере задания значений поля. В данном случае осуществляется совместная аппроксимация двух массивов данных, отвечающих непосредственно изучаемой площади D_1 и обрамляющей ее территории области D_2 . Под трансформантой функции

$u(\varphi, \lambda, R)$ подразумевается новая функция $v(\varphi, \lambda, R)$, определенная на произвольной поверхности S в пределах области D_1 : $v(\varphi, \lambda, R) = T\{u(\varphi, \lambda, R)\} = T\{u_1(\varphi, \lambda, R)\} + T\{u_2(\varphi, \lambda, R)\}$, где T – некоторый линейный оператор трансформации, а функция u представляет собой сумму двух составляющих: $u = u_1 + u_2$, где u_1 – низкочастотная составляющая, моделируемая источниками нижнего уровня, расположенными в пределах области D_2 , а u_2 – высокочастотная составляющая, созданная набором источников верхнего уровня, находящимися внутри области исследований D_1 [9].

Для расчетов использованы данные глобальной модели гравитационного поля Земли (ГПЗ) EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD, полученной на основе данных спутниковых миссий GRACE и SLR в 2019 г. Источником информации о рельефе земной поверхности являлась модель ETOPO1. Диапазон изменения аномалий силы тяжести ~ 330 мГал, высотные отметки H лежат в пределах от -18 до 2418 м. Область D_1 размером ~ 5.15 млн. кв км охватывает всю Сибирскую платформу и структуры ее обрамления (рис. 2). Шаг сети – 0.4° , размерность GRID модели – 51×121 ($N = 6171$ точек). Эквивалентные источники располагаются на 45 км ниже уровня моря. Поле в области D_2 с координатами 48° – 76° с.ш., 80° – 136° в.д. задано с шагом 1° , глубина точечных масс составляет 111.3 км ($N = 1653$ точки).

Выбор относительных глубин источников, отвечающих шагу сети задания поля по меридиану для двух цифровых моделей поля V_R влечет за собой сравнительно высокие числа обусловленности СЛАУ: $cond G = 248012$ при определении масс нижнего уровня и $cond G = 9645$ при определении масс верхнего уровня (обе матрицы являются невырожденными).

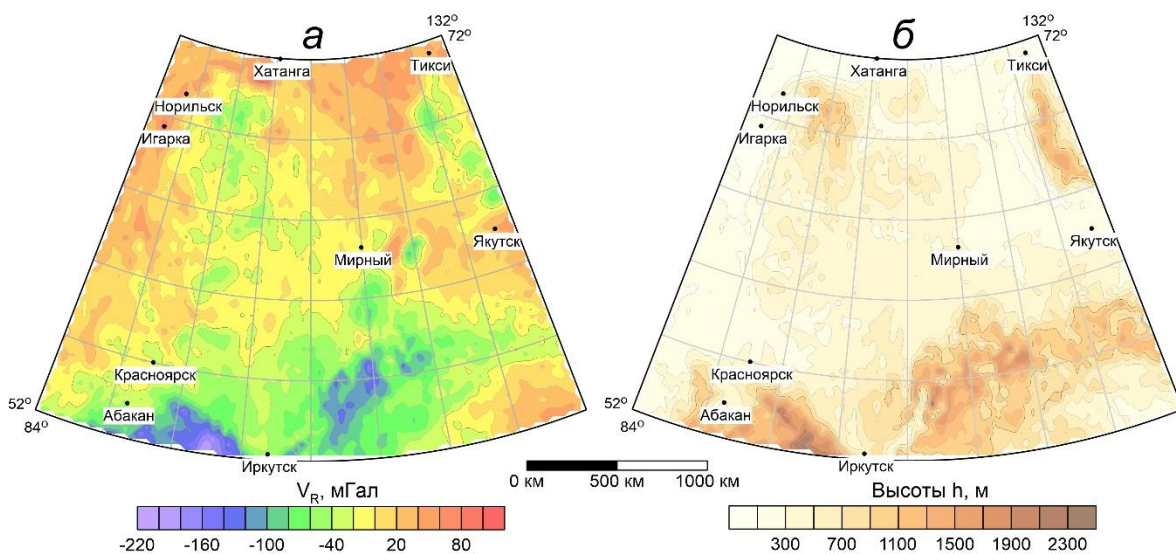


Рисунок 2. Карты изолиний аномалий силы тяжести (а) и высот рельефа дневной поверхности (б) Сибирской платформы.

Результаты решения СЛАУ вида (1) в процессе двухэтапного процесса подбора масс m представлены в табл. 1, 2. Относительные затраты времени на выполнение процедур матричной декомпозиции показаны на рис. 3.

Таблица 1. Результаты решения СЛАУ для масс нижнего уровня (размер $G - 1653 \times 7824$).

Тип разложения	Показатели качества решения СЛАУ, мГал				Время, с	Норма решения $\ m\ $
	Минимум	Максимум	Среднее	СКО		
Холецкого	-84.73	86.66	0.018	± 20.15	0.37	3970026
QR	-84.73	86.66	0.018	± 20.15	1.75	3970026
SDV	-84.73	86.66	0.018	± 20.18	10.91	1437685

Таблица 2. Результаты решения СЛАУ для масс верхнего уровня (размер $G - 6171 \times 6171$).

Тип разложения	Показатели качества решения СЛАУ, мГал				Время, с	Норма решения $\ m\ $
	Минимум	Максимум	Среднее	СКО		
Холецкого	-4.4×10^{-7}	4.9×10^{-7}	1.8×10^{-14}	3.4×10^{-10}	9.54	1979794
QR	-1.7×10^{-11}	2.4×10^{-11}	9.6×10^{-15}	1.1×10^{-12}	15.66	1979794
SDV	-1.7×10^{-11}	8.5×10^{-12}	4.8×10^{-14}	1.3×10^{-12}	74.74	1979595

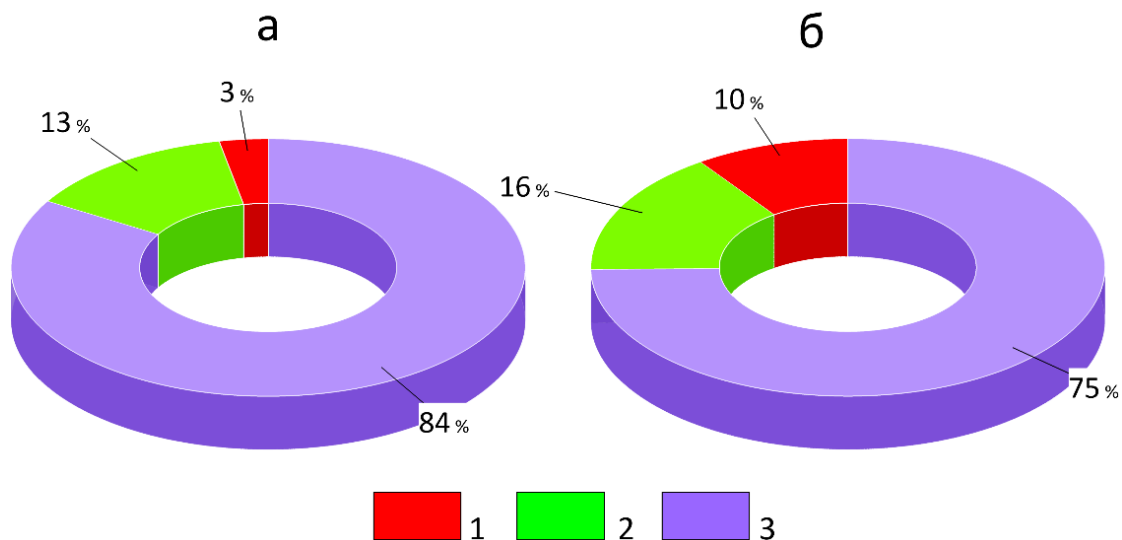


Рисунок 3. Относительные затраты времени в процентах на выполнение процедур матричной декомпозиции для нижних (а) и верхних (б) масс: 1 – разложение Холецкого; 2 – QR-разложение; 3 – SVD.

Как очевидно, все виды матричной декомпозиции обеспечивают высокое качество построения аналитической модели поля при заметных различиях в скорости вычислений. Нужно пояснить, что при определении масс нижнего

уровня методом SVD использовались 95% сингулярных чисел матрицы \mathbf{S} и уменьшение $\|\mathbf{m}\|$ обусловлено применением этой регуляризации (рис. 4).

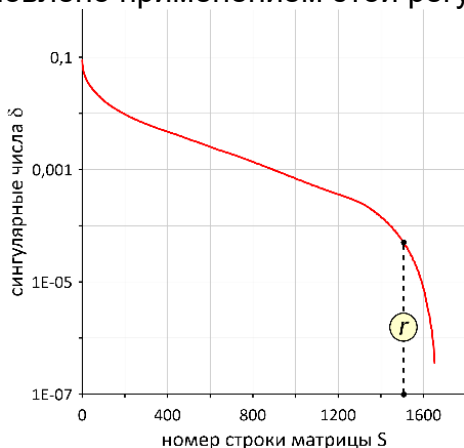


Рисунок 4. Сингулярные числа δ матрицы коэффициентов: моделирование аномалий силы тяжести Сибирской платформы с усечением \mathbf{S} при $r = 1488$.

Пересчет гравитационного поля V_R на фрагмент внешней, по отношению к Земле, сферической поверхности с радиусом $R' = R_0 + H$, где H – нормальная высота, в данном случае отвечает приведению поля V_Z на горизонтальную плоскость $z = const$ для плоской Земли. При работе в сферических координатах $\Sigma \varphi, \lambda, r$ используются достаточно простые аналитические выражения для вторых производных гравитационного потенциала V [7]. Аналогом вертикальной производной силы тяжести V_{ZZ} является 2-я радиальная производная силы тяжести V_{RR} . Соответствующую аналогию можно также провести между вторыми производными V_{ZX} , V_{ZY} и $V_{R\lambda}$, $V_{R\varphi}$. На рис. 5 приведены карта региональной составляющей гравитационного поля V_R изучаемой территории, полученная путем пересчета в верхнее полупространство на высоту 250 км и карта локальной (остаточной) составляющей этого поля.

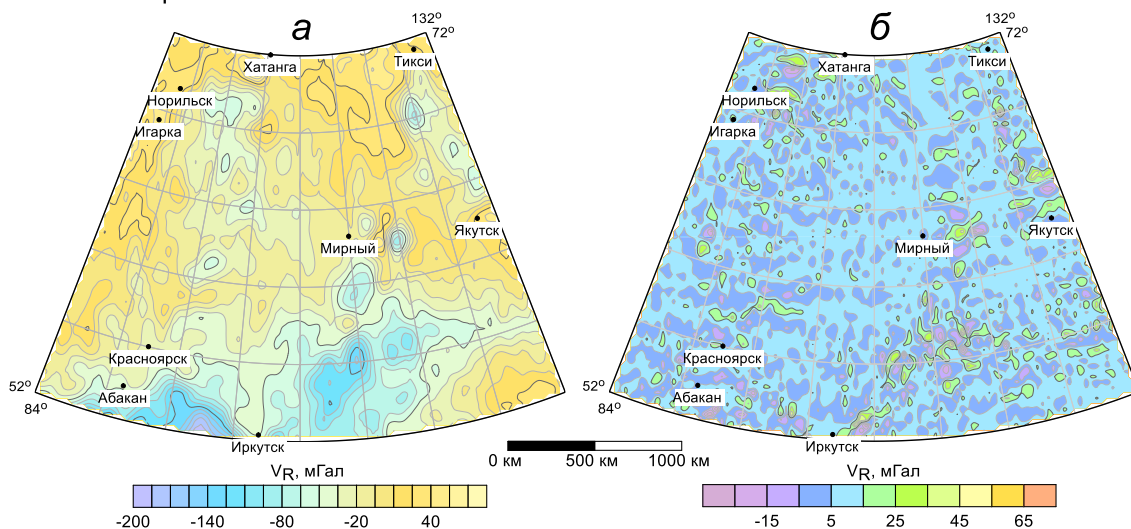


Рисунок 5. Карты изоаномал региональной (а) и локальной (б) составляющих гравитационного поля Сибирской платформы.

Объемное распределение эффективного параметра, пропорционального плотности горных пород построено в системе КОСКАД-3D с применением статистических, спектрально-корреляционных методов и алгоритма адаптивной фильтрации в окне живой формы на основе преобразования Б.А. Андреева [16]. Блок-диаграмма квазиплотности (рис. 6) представляет собой результат перехода от 2D к 3D геоизображениям на основе аналитических компьютерных процедур логико-математической генерализации. Последовательное повышение уровня генерализации обеспечивает проявление на геоизображениях элементов все более крупных геосистем, что способствует выявлению качественно новой информации и выявлению скрытых закономерностей [3]. Построенная блок-диаграмма характеризует основные особенности глубинного строения Сибирской платформы и обрамляющих ее структур, в т.ч. слабо проявленные на карте изоаномал наблюдаемого гравитационного поля.

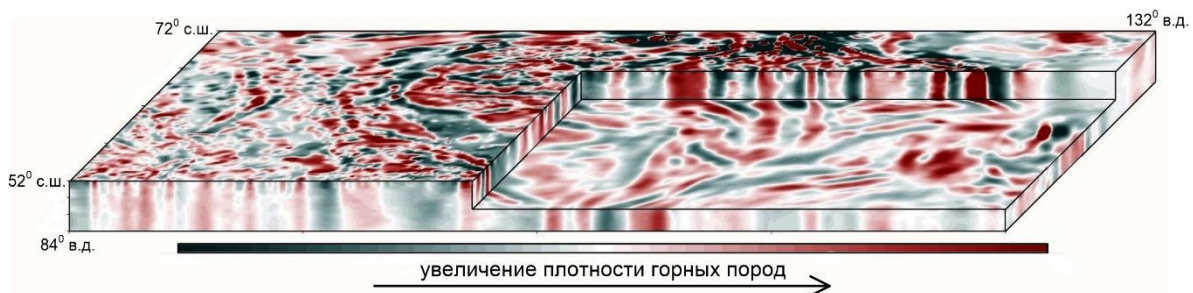


Рисунок 6. Блок-диаграмма относительного распределения плотности в литосфере Сибирской платформы.

Выводы

Рассмотренные способы матричной декомпозиции могут успешно использоваться при построении аналитических моделей региональных аномалий силы тяжести и их трансформации. В первую очередь это относится к Арктике и Антарктике, где уменьшение длины параллелей влечет за собой плохую обусловленность СЛАУ, решение которых требуется для определения эквивалентных масс [8]. SVD может рассматриваться как альтернатива классическим методам регуляризации, при числе точек поля $m = n \geq 200$ этот подход обладает заметными преимуществами по скорости вычислений [15], хотя и является самым медленным из рассмотренных. Наибольшую скорость вычислений обеспечивает разложение Холецкого, но при очень малых (близких к машинному нулю) коэффициентах \mathbf{G} системы уравнений эта процедура может отказать или потерять устойчивость. QR-разложение является менее быстрым, но более надежным способом решения плохо обусловленных нормальных систем уравнений, т.к. сохраняет евклидову норму матрицы коэффициентов. Рассмотренные в докладе алгоритмы ориентированы на извлечение геологической информации,

представленной в спутниковых (альтиметрических) глобальных моделях ГПЗ, но без ограничений могут работать с другими источниками данных.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (рег. номер НИОКТР: 126012716041-5).

Библиография

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука. 2000. 622 с.
2. Белашев Б.З., Бакунович Л.И., Шаров Н.В. Моделирование литосферы региона Белого моря с использованием декомпозиции аномальных гравитационного и магнитного полей // Геодинамика и тектонофизика. 2023. Т. 14, № 5:0720.
3. Берлянт А.М. Теория геоизображений. М.: ГЕОС, 2006. 262 с.
4. Васин В.В. Основы теории некорректных задач/ Новосибирск: изд-во СО РАН, 2020. 313 с.
5. Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю. Моделирование в разведочной геофизике. М.: Недра, 1987. 192 с.
6. Гадыльшин К.Г., Чеверда В.А. Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15, № 3. С. 499–513.
7. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова и др. Моделирование аномалий силы тяжести системой точечных масс на сферообразной Земле. // Геофизика. 2023. № 5. С. 10–17.
8. Долгаль А.С., Огородова И.В., Рыжов Н.В., Христенко Л.А. Моделирование аномалий силы тяжести эквивалентными источниками в полярных областях Земли // Вестник Пермского университета. Геология. 2025. Т. 24, № 3. С. 226–235.
9. Долгаль А.С., Рыжов Н.В., Хохлова В.В. Повышение точности трансформации региональных гравитационных аномалий: учет влияния масс, находящихся за пределами изучаемой площади // Вестник АГГИ. 2025. № 2(2). С. 23–34.
10. Кабанихин С.И., Криворотько О.И. Сингулярное разложение в задаче об источнике // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 205–211.
11. Канайкин В.С., Турутанов Е.Х., Буянтогтох Б. Особенности трансформации и инверсии гравитационного поля с применением дисперсионного и регрессионного анализов // Известия Сибирского отделения секции наук о Земле Российской академии естественных

- наук. Геология, разведка и разработка месторождений полезных ископаемых. 2018. Т. 41, № 3(64). С. 93–105.
12. Карлик А.П., Канушин В.Ф., Ганагина И.Г., Голдобин Д.Н., Мазурова Е.М. Исследования спектральных характеристик глобальных моделей гравитационного поля Земли, полученных по космическим миссиям CHAMP, GRACE и GOCE // Гироскопия и навигация. 2014. № 4(87). С. 34–44.
 13. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение / Пер. с англ. под ред. Х. Д. Икрамова. М.: Мир, 2001. 575 с.
 14. Конешов В.Н., Непоклонов В.Б., Спиридонова Е.С., Максимова М.В. Особенности сравнительной оценки глобальных моделей гравитационного поля Земли // Физика Земли. 2020. № 2. С. 115–126.
 15. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. Изд. 3-е, испр. и доп. М: ЛЕНАНД, 2024. 368 с.
 16. Петров А.В., Демура Г.В., Зиновкин С.В. Компьютерная технология статистического и спектрально-корреляционного анализа данных КОСКАД 3D и практические результаты // Недропользование XXI век. 2017. № 1(64). С. 44–59.
 17. Сильвестров И.Ю. Анализ сингулярного разложения линеаризованного оператора динамической теории упругости для случая вертикального сейсмического профилирования // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 6. С. 90–100.
 18. Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: ОИФЗ РАН. 2009. 254 с.

19. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач: учебное пособие. Изд. 4-е. М.: ЛЕНАНД, 2022. 288 с.

References

1. Bahvalov N.S., ZHidkov N.P., Kobel'kov G.M. CHislennye metody. M.: Nauka. 2000. 622 s.
2. Belashev B.Z., Bakunovich L.I., SHarov N.V. Modelirovanie litosfery regiona Belogo morya s ispol'zovaniem dekompozicii anomal'nyh avitacionnogo i magnitnogo polej // Geodinamika i tektonofizika. 2023. T. 14, № 5:0720.
3. Berlyant A.M. Teoriya geoizobrazhenij. M.: GEOS, 2006. 262 s.
4. Vasin V.V. Osnovy teorii nekorrektnykh zadach/ Novosibirsk: izd-vo SO RAN, 2020. 313 s.
5. Vahromeev G.S., Davydenko A.YU. Modelirovanie v razvedochnoj geofizike. M.: Nedra, 1987. 192 s.
6. Gadyl'shin K.G., CHEverda V.A. Obrashchenie polnykh volnovykh polej nelinejnym metodom naimen'shix kvadratov: SVD analiz // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. 2014. T. 15, № 3. S. 499–513.
7. Dolgal' A.S., Kosticyn V.I., Novikova i dr. Modelirovanie anomalij sily tyazhesti sistemoy tochechnykh mass na sferoobraznoj Zemle. // Geofizika. 2023. № 5. S. 10–17.
8. Dolgal' A.S., Ogorodova I.V., Ryzhov N.V., Hristenko L.A. Modelirovanie anomalij sily tyazhesti ekvivalentnymi istochnikami v polyarnykh oblastyakh Zemli // Vestnik Permskogo universiteta. Geologiya. 2025. T. 24, № 3. S. 226–235.
9. Dolgal' A.S., Ryzhov N.V., Hohlova V.V. Povyshenie tochnosti transformacii regional'nykh gravitacionnykh anomalij: uchet vliyaniya mass, nahodyashchih'sya za predelami izuchaemoj ploshchadi // Vestnik AGGI. 2025. № 2(2). S. 23–34.
10. Kabanihin S.I., Krivorot'ko O.I. Singulyarnoe razlozhenie v zadache ob istochnike // Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki. 2012. T. 15, № 2. S. 205–211.
11. Kanajkin V.S., Turutanov E.X., Buyantogtoh B. Osobennosti transformacii i inversii gravitacionnogo polya s primeneniem dispersionnogo i regressionnogo analizov // Izvestiya Sibirskogo otdeleniya sekcii nauk o Zemle Rossijskoj akademii estestvennykh nauk. Geologiya, razvedka i razrabotka mestorozhdenij poleznykh iskopaemykh. 2018. T. 41, № 3(64). S. 93–105.
12. Karpik A.P., Kanushin V.F., Ganagina I.G., Goldobin D.N., Mazurova E.M. Issledovaniya spektral'nykh harakteristik global'nykh modelej gravitacionnogo polya Zemli, poluchennykh po kosmicheskim missiyam

- CHAMP, GRASE i GOCE // Гироскопиya i навигациya. 2014. № 4(87). С. 34–44.
13. *Kahaner D., Mouler K., Nesh S.* Численные методы и программное обеспечение / Пер. с англ. под ред. Н. Д. Икрамова. М.: Mir, 2001. 575 с.
 14. *Koneshov V.N., Nepoklonov V.B., Spiridonova E.S., Maksimova M.V.* Особенности сравнительной оценки глобальных моделей гравитационного поля Земли // Физика Земли. 2020. № 2. С. 115–126.
 15. *Leonov A.S.* Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в MATLAB. Изд. 3-е, испр. и доп. М: LENAND, 2024. 368 с.
 16. *Petrov A.V., Demura G.V., Zinovkin S.V.* Компьютерная технология статистического и спектрально-корреляционного анализа данных КОСКАД 3D и практические результаты // Недропользование XXI век. 2017. № 1(64). С. 44–59.
 17. *Sil'vestrov I.YU.* Анализ сингулярного разложения линеаризованного оператора динамической теории упругости для случая вертикального сейсмического профилирования // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 6. С. 90–100.
 18. *Strahov V.N., Kerimov I.A., Stepanova I.E.* Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: OIFZ RAN. 2009. 254 с.
 19. *Tihonov A.N., Arsenin V.YA.* Методы решения некорректных задач: учебное пособие. Изд. 4-е. М.: LENAND, 2022. 288 с.