

Орторомбическая модель вертикально-трещиноватых сланцев

Т.И. Чичина*^{*}, О.Ю. Титов, и Р. Торрес-Варгас (Мексиканский Нефтяной Институт, «Instituto Mexicano del Petróleo»)

Аннотация

Трансверсально-изотропные VTI-сланцы могут стать орторомбическими (модель «ORT») из-за наведённой азимутальной анизотропии вследствие напряженного состояния геологической среды и/или вертикальной трещиноватости. И эта азимутальная анизотропия оказывается сильнее, чем собственная VTI-анизотропия сланцевого пласта (последняя характеризуется параметрами Томсена ε^{VTI} , γ^{VTI} и δ^{VTI}). И тогда результирующие параметры анизотропии в модели «ORT» будут характеризовать *азимутальную* анизотропию, что мы и показываем, интерпретируя данные физического моделирования (при разных концентрациях вертикальных трещин). При этом мы тестируем мнемоническую формулу суммирования «ORT=VTI+HTI», в которой «HTI» – это «эквивалентная HTI-среда», т.е. такая, в которой точно такие же трещины, как в искомой «ORT». Эта среда «HTI» характеризуется параметрами Томсена (ε^{HTI} , γ^{HTI} и δ^{HTI}). Таким образом, необходимо учитывать азимутальную анизотропию «HTI», которая приводит к более сложной, но более правильной модели «ORT» для сланцев. В отличие от трансверсально-изотропной среды в орторомбической имеется по паре каждого параметра Томсена, т.е. ($\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$), ($\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$) и ($\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$): один – в вертикальной плоскости yz (это плоскость трещин), а второй – в другой вертикальной плоскости xz. Полученная по теоретической формуле "ORT = VTI + HTI" величина параметра $\delta_{\text{теор}}^{(2)}$ практически совпадает с настоящим (истинным) параметром Томсена $\delta^{(2)}$ по данным физического и численного моделирования, т.е. $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$. Однако, аналогичная формула сложения оказалась неточной для остальных двух параметров Томсена $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$. Что касается параметров $\varepsilon^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ и $\delta^{(1)}$, то они оказались равными ε^{VTI} , γ^{VTI} и δ^{VTI} , соответственно, что тоже подтверждает теорию.

Ключевые слова: Сланцы, анизотропия, трещины, VTI, HTI, орторомбическая среда, параметры Томсена

Orthorhombic model of vertically fractured shales

T.I. Chichinina*, O.Yu. Titov and R. Torres-Vargas (Mexican Petroleum Institute, "Instituto Mexicano del Petróleo")

Abstract

Transversely isotropic VTI-shales can become orthorhombic (the model "ORT") because of induced azimuthal anisotropy due to the stress state of the geological medium and/or vertical fracturing. And this azimuthal anisotropy turns out to be stronger than the intrinsic VTI anisotropy of the shale formation (the latter is characterized by the Thomsen parameters ε^{VTI} , γ^{VTI} and δ^{VTI}). And then the resulting anisotropy parameters in the "ORT" model will characterize the azimuthal anisotropy; this we show by interpreting the physical modeling data (at different concentrations of vertical fractures). In this case, we test the mnemonic summation formula "ORT=VTI+HTI", in which "HTI" is an "equivalent HTI medium", in which there are exactly the same fractures as in the sought "ORT". That "HTI" medium is characterized by the Thomsen parameters (ε^{HTI} , γ^{HTI} and δ^{HTI}). Thus, it is necessary to take into account the azimuthal anisotropy of "HTI", which leads to a more complex, but more correct "ORT" model for shales. Unlike a transversely isotropic medium, an orthorhombic medium has a pair of each Thomsen parameter, i.e., ($\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$), ($\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$) and ($\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$): one is in the vertical plane yz

(this is the plane of fractures), and the second is in another vertical plane xz. The theory-predicted parameter $\delta^{(2)}$ obtained using the theoretical formula "ORT = VTI + HTI" practically coincides with the real (true) Thomsen parameter $\delta^{(2)}$ according to our physical and numerical modeling data, i.e., $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$. However, a similar addition formula turned out to be inaccurate for the rest two Thomsen parameters $\varepsilon^{(2)}$ and $\gamma^{(2)}$. As for the parameters $\varepsilon^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ and $\delta^{(1)}$, they turned out to be equal to ε^{VTI} , γ^{VTI} and δ^{VTI} , respectively, that also confirms the theory.

Key words: Shales, anisotropy, fractures, VTI, HTI, orthorhombic medium, Thomsen parameters.

Введение

Сланцевые породы обладают ярко выраженной «полярной» анизотропией, описываемой трансверсально-изотропной моделью «VTI» (Рис. 1), которая задаётся пятью параметрами Томсена ε , γ , δ , V_{P0} и V_{S0} (Thomsen, 1986), из них особое внимание уделяется здесь параметру δ .

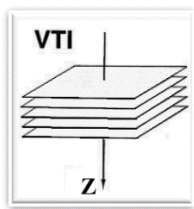


Рисунок 1. В модели «VTI» ось z – это вертикальная («Vertical») ось симметрии трансверсально-изотропной среды, и поэтому среда «VTI» так и называется, т.е., «Vertical Transverse Isotropy».

Параметр δ – это единственный параметр Томсена, который определяется по данным отражённых Р-волн напрямую (в отличие от ε), например, по азимутальному скоростному анализу «NMO» (Grechka, Tsvankin, 1998; Chichinina et al., 2025a). А именно, в результате азимутального анализа скоростей «NMO» получается карта направления трещиноватости, как это показано на Рис. 2 (Горшкалев, Карстен, и др., 2011). Кроме направления трещиноватости, азимутальный анализ скорости «NMO» даёт параметр Томсена δ , как это показано на Рис. 3 (Чичинина и др., 2024a; 2024b; 2025b). Параметр δ выражает относительную разницу между квадратами минимальной и максимальной скоростей «NMO»:

$$\delta = \frac{(V_{min}^{NMO})^2 - (V_{max}^{NMO})^2}{2(V_{max}^{NMO})^2}. \quad (1)$$

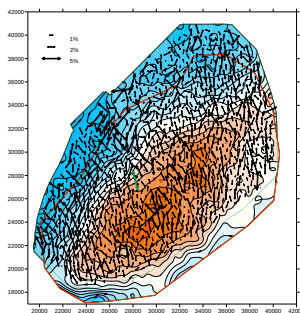


Рисунок 2. Распределение по площади направлений большей полуоси «NMO»-эллипса эффективной скорости, вычисленной по горизонтам суходунинской свиты (СДз). Размер стрелки соответствует величине параметра Томсена δ . Цветом показана структурная карта по горизонту СДз (Пеляткинская площадь). (Рисунок из работы Горшкалев, Карстен, и др. (2011), с разрешения авторов.)

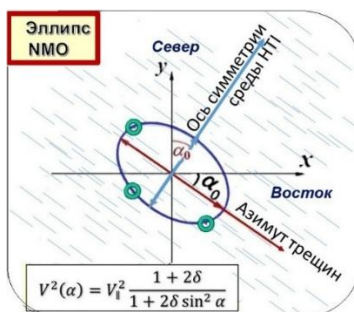


Рисунок 3. Эллипс «NMO». Вид сверху, в горизонтальной плоскости xy. Большая полуось эллипса ориентирована по азимуту трещин ($\parallel$) и равна наибольшей скорости, $V_{max}^{NMO} \equiv V_{\parallel}$. Маленькая полуось эллипса – по оси симметрии «HTI»-модели, перпендикулярно плоскости трещин ($\perp$), и равна наименьшей скорости, $V_{min}^{NMO} \equiv V_{\perp}$. Азимут α_0 – это искомый угол, определяющий азимут оси симметрии. Параметр δ выражает относительную разность минимальной и максимальной осей эллипса и/или скоростей «NMO», V_{max} и V_{min} .

Сначала рассмотрим *собственную* VTI-анизотропию сланцев (или же «полярную анизотропию»), которая характеризуется положительными параметрами Томсена ϵ и γ , т.е., они всегда больше нуля ($\epsilon > 0$ и $\gamma > 0$) в сланцах (без вертикальной трещиноватости). С параметром Томсена δ не всё так однозначно насчёт его знака. Можно попытаться проанализировать величину и знак параметра δ : когда он положительный ($\delta > 0$), а когда отрицательный ($\delta < 0$). Например, согласно исследованиям (Chichinina, Vernik, 2018) параметр δ всегда больше нуля в органических глинистых сланцах “organic mudrocks”, что показано на Рис. 4 (а).

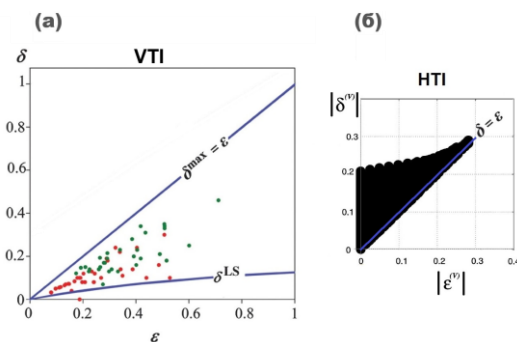


Рисунок 4. (а): Параметры анизотропии (ϵ , δ) по реальным данным измерений скоростей на образцах сланцев: данные из работы Vernik (2016) (которые показаны точками). Линиями обозначены теоретические границы области допустимых значений параметра δ , верхняя $\delta_{\max} = \epsilon$. Верхняя граница определяется равенством $\delta_{\max} = \epsilon$. Нижняя граница определяется как $\delta_{\min} = \delta^{LS}$, где δ^{LS} – это параметр δ в модели Linear Slip (LS) (Chichinina, Vernik, 2018). (б): Область допустимых значений для δ (как функции от ϵ) в «НТИ»-модели трещиноватой среды. (Оригинальный рисунок взят из работы Bakulin et al. (2000a) и переделан на абсолютные величины $|\delta^{(v)}|$ и $|\epsilon^{(v)}|$ для удобного сравнения с положительными величинами ϵ и δ в среде «VTI».) Заметим, что $\delta^{(v)}$, и $\epsilon^{(v)}$ всегда отрицательные в среде «НТИ», тогда как в «VTI»-сланцах ϵ и δ положительные (по крайней мере на этом рисунке 4(а)).

В рамках модели «VTI» параметр δ может быть и отрицательным, например, для водонасыщенных сланцев (Vernik, Liu, 1997; Chesnokov et al., 2009). Авторы статьи Bayuk et al. (2007) обратили внимание на отрицательные значения δ для композита «вода-глина» (глина со связанной водой); отрицательные значения δ в глинистых сланцах, богатых смектитом, объясняются сильной способностью смектита связывать воду.

В настоящем исследовании мы покажем, что на величину параметра δ в сланцах может повлиять азимутальная анизотропия «НТИ» из-за вертикальной трещиноватости и/или напряженного состояния геологической среды, как это показано на Рис. 5. В результате среда становится орторомбической (Schoenberg, Helbig, 1997). И эта азимутальная анизотропия может радикально изменить величину параметров Томсена в сланцах (ϵ , γ , δ) и даже обратить их знак с плюса на минус. Простейшая анизотропная модель «НТИ» описывает азимутально-анизотропную среду с параллельными вертикальными трещинами, «внедрёнными» в изотропную породу-матрицу, как это показано на Рис. 5. В противоположность параметру Томсена δ в модели «VTI», в модели «НТИ» параметр δ отрицательный, как и два других параметра анизотропии ϵ и γ . Заметим, что для НТИ-среды введёно специальное обозначение для параметров анизотропии: $\epsilon^{(v)}$, $\gamma^{(v)}$ и $\delta^{(v)}$ (Bakulin et al., 2000a). В рамках модели линейного проскальзывания, Linear Slip (Schoenberg, 1980), авторы работы Bakulin et al. (2000a) исследовали область допустимых значений для $\delta^{(v)}$ (как функцию от $\epsilon^{(v)}$), которая изображена на Рис. 4(б); эту модель будем называть «эквивалентной моделью НТИ», а для параметров Томсена $\epsilon^{(v)}$, $\gamma^{(v)}$ и $\delta^{(v)}$ в «НТИ»-среде будем использовать более удобные обозначения: ϵ^{HTI} , γ^{HTI} и δ^{HTI} . Также для удобства в нижеследующем тексте будем использовать обозначения VTI, НТИ и ORT без кавычек.

Итак, под действием горизонтальных напряжений (и/или вертикальной трещиноватости) возникает азимутальная анизотропия типа НТИ (Рис. 5). Однако, из-за собственной VTI-

анизотропии сланцев, мы будем уже иметь дело не с НТИ-моделью, а с орторомбической (ORT) (Schoenberg, Helbig, 1997; Bakulin et al., 2000b), как это показано на Рис. 6.

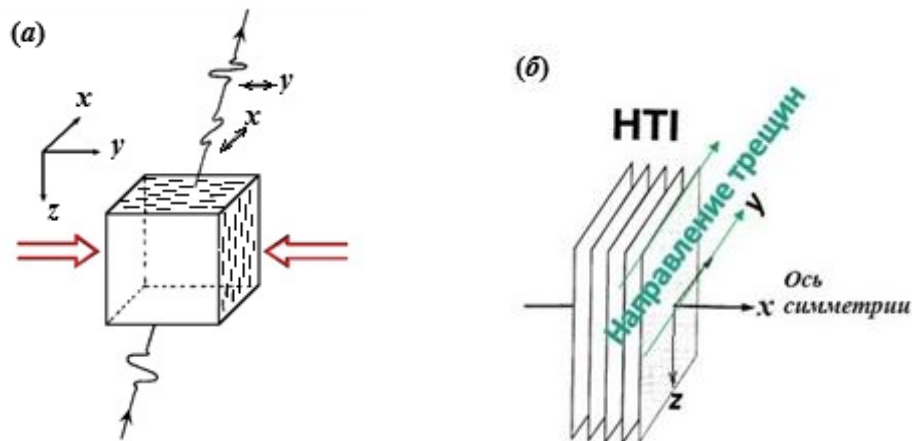


Рисунок 5. (а): Модель “НТИ”. Под действием горизонтальных напряжений (которые обозначены красными стрелками) возникает азимутальная анизотропия, которую также можно обнаружить и по расщеплению поперечных волн, $S1$ и $S2$. (Первоначально рисунок взят из Крэмпина (Crampin, Lovel, 1991) и немного модифицирован Кашибиным и нами (Кашибин, 2001)). (б): В модели НТИ—ось x —это ось симметрии среды НТИ; направление трещин—по оси y ; плоскость yz —это плоскость трещин. Плоскость xz —называется «плоскостью оси симметрии.»

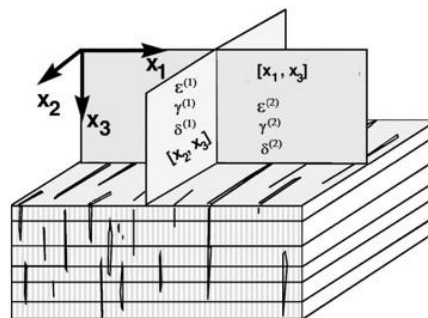


Рисунок 6. Орторомбическая модель (ORT) для вертикально-трещиноватых сланцев. Параметры Томсена ϵ , γ и δ с индексом «(1)» (т.е. $\epsilon^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$) определяются в плоскости yz (т.е., в плоскости $[x_2, x_3]$ на этом рисунке), а $\epsilon^{(2)}$, $\delta^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$ —в плоскости xz (она же— $[x_1, x_3]$).

Эта модель ORT может быть представлена как суперпозиция двух, VTI и НТИ (т.е. “ORT=VTI+НТИ”). В орторомбической модели 9 независимых параметров анизотропии, а именно—два эпсилон ($\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$), две гаммы ($\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$), три дельты ($\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\delta^{(3)}$) и две вертикальные скорости V_{p0} и V_{s0} .

Рассмотрим смысл формулы сложения “ORT=VTI+НТИ” в применении её к параметру Томсена $\delta^{(2)}$, который измеряется в плоскости xz (как это показано на Рис. 6), и который как раз несёт информацию о вертикальных трещинах и/или напряжённом состоянии среды. Плоскость xz —это так называемая «плоскость оси симметрии среды НТИ»; причём эта горизонтальная ось (x) симметрии НТИ-среды совпадает с нормалью (x) к плоскости (yz) вертикальных трещин, как это показано на Рис. 5(б) (Bakulin et al., 2000a). Мы покажем, что результирующий параметр $\delta^{(2)}$ в ORT-среде будет по величине приближаться к $\delta^{НТИ}$ (имеющему большое отрицательное значение). Это можно объяснить, используя мнемоническую «формулу сложения» “ORT=VTI+НТИ”, т.е.

$$\delta_{\text{теор.}}^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{НТИ}, \quad (2)$$

причём $\delta^{VTI} = \delta_{\text{теор}}^{(1)}$. В этой формуле сложения δ^{VTI} — это параметр анизотропии Томсена δ в трансверсально-изотропной VTI-породе, являющейся анизотропной моделью сланцевой породы (без трещин). Второе слагаемое δ^{HTI} в формуле (2) — это большой отрицательный параметр анизотропии ($\delta^{(V)}$) в эквивалентной НТИ-среде ($\delta^{HTI} < 0$). Эквивалентной называется такая НТИ-среда, в которой трещины такие же, как и в ORT-среде, но они внедрены в *изотропную* породу-матрицу, в отличие от трещин в ORT-среде: в последней – порода-матрица *VTI-анизотропная*. Если сравнить $|\delta^{HTI}|$ с δ^{VTI} на Рис. 4, то становится понятно, что магнитуда азимутальной НТИ-анизотропии (представленная параметром $|\delta^{HTI}|$) оказывается больше магнитуды VTI-анизотропии сланцев (параметр δ^{VTI}). И поэтому, в формуле сложения (уравнение (2)), результирующая величина $\delta^{(2)}$ в орторомбической среде (и ее знак «минус» в том числе) определяется в основном вторым (отрицательным) слагаемым δ^{HTI} , а не первым (δ^{VTI}). По данным физического и численного моделирования мы покажем, что полученная по формуле (2) величина $\delta_{\text{теор}}^{(2)}$ практически совпадает с настоящим параметром $\delta^{(2)}$. Однако, аналогичная формула сложения “ORT=VTI+HTI” — в применении её к $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$ — оказывается неточной.

Орторомбическая модель

Мы изучаем анизотропию вертикально-трещиноватых сланцев, используя данные физического моделирования орторомбической модели (из нашей совместной работы Silva et al., 2019). Мы применяем математическую модель «линейного проскальзывания» («Linear Slip model») для орторомбической среды (Schoenberg, Helbig, 1997), которую мы коротко называем моделью ORT. В модели ORT имеется только 8 независимых параметров: 5 компонент $\{C_{ij}^{VTI}\}$ тензора упругости VTI и 3 параметра трещиноватости (Δ_N, Δ_V и Δ_H), через которые выражаются 9 компонент $\{C_{ij}^{ORT}\}$ тензора упругости орторомбической среды. Таким образом, модель ORT – это особый случай орторомбической среды. Орторомбический тензор упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$ для вертикально трещиноватых сланцев (модель ORT) определяется следующей симметричной матрицей (Schoenberg, Helbig, 1997; Thomsen, Sayers, 2022):

$$\begin{bmatrix} C_{11}^{VTI}[1 - \Delta_N] & C_{12}^{VTI}[1 - \Delta_N] & C_{13}^{VTI}[1 - \Delta_N] & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{VTI}[1 - \Delta_N] & C_{11}^{VTI}[1 - \Delta_N G^2] & C_{13}^{VTI}[1 - \Delta_N G] & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{VTI}[1 - \Delta_N] & C_{13}^{VTI}[1 - \Delta_N G] & C_{33}^{VTI}[1 - \Delta_N h] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{VTI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{VTI}[1 - \Delta_V] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{VTI}[1 - \Delta_H] \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В уравнении (3) введены следующие сокращённые обозначения: $h = \frac{(C_{13}^{VTI})^2}{C_{11}^{VTI} C_{33}^{VTI}}$, и $G = \frac{C_{12}^{VTI}}{C_{11}^{VTI}}$.

В эксперименте было пять образцов породы (с искусственными трещинами) орторомбической системы симметрии, отличающиеся друг от друга концентрацией трещин (Silva et al., 2019; Chichinina et al., 2024c). Вертикальные прямоугольные трещины квадратной формы были встроены в тонкослоистую породу-матрицу (последняя послужила нам как VTI-модель сланцевой породы), см. фотографию искусственных образцов трещиноватой породы на Рис. 7. Кроме этих пяти орторомбических образцов, был шестой, эталонный образец (модель VTI), выполненный из того же тонкослоистого материала; этот искусственный тонкослоистый образец «VTI» имитирует сланцеватую породу. Скорости Р- и S-волн измерялись при углах падения 0° и 90° , и таким образом мы получили параметры Томсена ε и γ в плоскостях (xz) и (yz) соответственно:

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{C_{11}^{ORT} - C_{33}^{ORT}}{2C_{33}^{ORT}}; \quad \varepsilon^{(1)} = \frac{C_{22}^{ORT} - C_{33}^{ORT}}{2C_{33}^{ORT}}; \quad (4)$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{C_{66}^{ORT} - C_{44}^{ORT}}{2C_{44}^{ORT}}; \quad \gamma^{(1)} = \frac{C_{66}^{ORT} - C_{55}^{ORT}}{2C_{55}^{ORT}}. \quad (5)$$

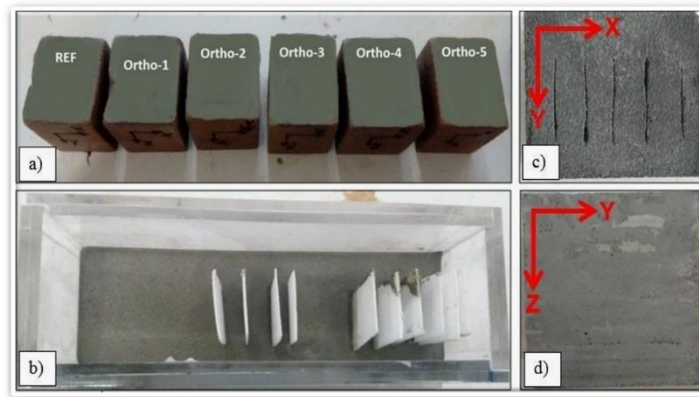


Рисунок 7. Физическое моделирование орторомбической модели для вертикально-трещиноватых сланцев. Пять образцов породы «Ortho-*i*» (*i*=1, 2, ..., 5) с искусственными вертикальными трещинами в тонкослоистом фундаменте. Дополнительно для сравнения использовался эталонный тонкослоистый образец «REF», без трещин, имитирующий сланцевую породу-фундамент ВТИ. (Рисунок – из работы Silva et al. (2019), с разрешения авторов.)

Для оценки параметра Томсена δ в орторомбической породе (а вернее — всех трёх δ -параметров $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ и $\delta^{(3)}$ в плоскостях (yz), (xz) и (xy), соответственно) нам не хватало дополнительных измерений скорости V_{P45} при угле падения 45° (например, Chichinina, 2017). Мы разработали способ определения δ -параметров по имеющимся данным, используя уравнение (3) для матрицы $\{C_{ij}^{ORT}\}$, по которому мы вычислили Δ_N , Δ_V и Δ_H (Chichinina et al., 2024c).

В этом исследовании мы покажем, что величина параметров Томсена (т.е. ϵ , γ , δ) в вертикально трещиноватых сланцах сильно зависит от азимутальной анизотропии, возникающей из-за напряженного состояния земной коры и/или из-за наличия параллельных вертикальных трещин, в результате чего сланцы становятся орторомбическими. Эта азимутальная анизотропия может радикально изменить величину параметров Томсена и даже изменить их знак с положительного на отрицательный. Орторомбическая модель трещиноватых сланцев («ORT») может быть представлена как суперпозиция двух трансверсально-изотропных моделей, «VTI» и «HTI»; по принципу «ORT=VTI+HTI» (например, Chichinina et al., 2024c). В модели «ORT» параллельные вертикальные трещины вызывают азимутальную анизотропию; этот эффект описывается «эквивалентной» моделью HTI (Bakulin et al., 2000a, Bakulin et al., 2000b). Однако помимо этой «наведённой» азимутальной анизотропии «HTI», в рассматриваемой модели «ORT» также учитывается влияние собственной полярной анизотропии сланцев «VTI», за счёт их тонкослоистой микроструктуры (Schoenberg, Helbig, 1997).

В нашем физическом моделировании (Silva et al., 2019) измерялись скорости продольных волн (P) и двух поперечных (SV и SH) только на вертикальном и горизонтальном направлениях. Однако, чтобы найти $\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$ необходимо иметь хотя бы одно измерение скорости V_{P45} (под углом 45°), по которому можно было бы вычислить недиагональные компоненты тензора C_{23}^{ORT} и C_{13}^{ORT} . То есть для получения параметра Томсена $\delta^{(2)}$ напрямую, согласно его определению (в плоскости xz), необходимо знать величину C_{13}^{ORT} , а именно:

$$\delta^{(2)} = \frac{(C_{13}^{ORT} + C_{55}^{ORT})^2 - (C_{33}^{ORT} - C_{55}^{ORT})^2}{2C_{33}^{ORT}(C_{33}^{ORT} - C_{55}^{ORT})}. \quad (6)$$

Аналогично, формула для параметра $\delta^{(1)}$ (согласно его определению, в плоскости xz орторомбической среды) включает в себя компоненту тензора упругости C_{23}^{ORT} :

$$\delta^{(1)} = \frac{(C_{23}^{ORT} + C_{44}^{ORT})^2 - (C_{33}^{ORT} - C_{44}^{ORT})^2}{2C_{33}^{ORT}(C_{33}^{ORT} - C_{44}^{ORT})}. \quad (7)$$

Несмотря на отсутствие измерений скоростей на «косых» лучах (например, V_{P45} под углом 45°), мы полностью реконструировали орторомбический тензор упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$, как это показано на Рис. 8(а) и в Таблице 1. Для этого мы использовали математическую модель «линейного проскальзывания» (“Linear Slip”, Schoenberg, Helbig, 1997), вычислив по формуле (3) все три ослабленности трещин, Δ_N , Δ_V и Δ_H , которые показаны на Рис. 8(б) и в Таблице 2. Δ_N — это нормальная ослабленность трещин согласно терминологии Бакулина с соавторами (Bakulin et al. 2000a), или же «податливость трещин» (последний термин используется например в работе Томсена-Сайерса (Thomsen, Sayers, 2022)). Зная Δ_N , мы вычисляем C_{13}^{ORT} , C_{23}^{ORT} и C_{12}^{ORT} по формуле (3) для тензора упругости орторомбической среды $\{C_{ij}^{ORT}\}$. В дополнение к нормальной ослабленности Δ_N , мы также вычисляем две поперечные ослабленности Δ_V и Δ_H по следующим формулам:

$$\Delta_N = 1 - \frac{C_{11}^{ORT}}{C_{11}^{VTI}}, \quad \Delta_V = 1 - \frac{C_{55}^{ORT}}{C_{55}^{VTI}}, \quad \Delta_H = 1 - \frac{C_{66}^{ORT}}{C_{66}^{VTI}}. \quad (8)$$

Поперечные ослабленности Δ_V и Δ_H оказались практически равными друг другу, как это можно заметить на Рис. 8 (б), и поэтому мы заменили их одной величиной Δ_T (т.е., $\Delta_V \approx \Delta_H = \Delta_T$), где Δ_T — среднее арифметическое от Δ_V и Δ_H . Все эти величины (безразмерные) — Δ_N , Δ_V , Δ_H и Δ_T — показаны в Таблице 2.

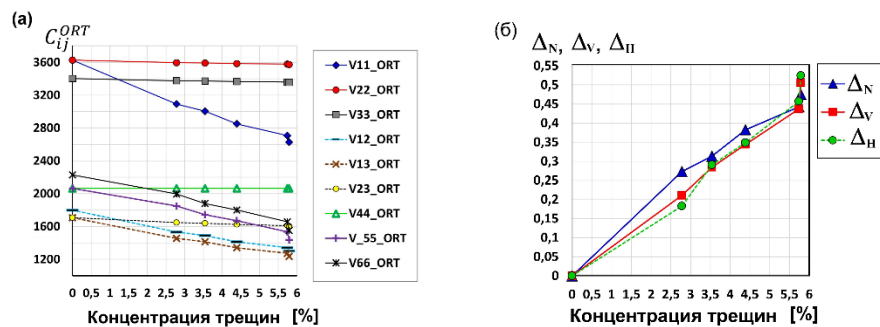


Рисунок 8. (а): Нормированные компоненты тензора упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$ для орторомбической породы (с единичной плотностью и пересчитанные в соответствующие скорости волн $\{V_{ij}^{ORT}\}$, м/с), полученные в эксперименте для шести образцов, с различными концентрациями трещин, включая нулевую концентрацию, которая соответствует эталонному образцу “VTI” (т.е. сланец без трещин). (б): Нормальная ослабленность Δ_N и две поперечные ослабленности, Δ_V и Δ_H (соответственно, вертикальная и горизонтальная).

Таблица 1

Компоненты тензора упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$ для орторомбической породы “ORT” (нормированные, с единичной плотностью), пересчитанные в соответствующие скорости волн $\{V_{ij}^{ORT}\}$, м/с

Конц. Трещин, %	V11_ORT	V22_ORT	V33_ORT	V44_ORT	V_55_ORT	V66_ORT	V13_ORT	V12_ORT	V23_ORT
0 (VTI)	3626,7	3626,7	3402	2065,4	2065,4	2227,3	1706,924603	1797,560099	1706,924603
2,78	3091,603	3596,664163	3375,974265	2065,4	1851,144404	1996,249604	1455,078507	1532,341301	1648,623384
3,54	3004,744	3592,218769	3372,123793	2065,4	1743,402624	1880,062295	1414,197882	1489,289967	1639,860688
4,39	2850,265	3584,612855	3365,536625	2065,4	1669,892929	1800,790414	1341,491563	1412,723036	1624,783856
5,74	2707,08	3577,90805	3359,730771	2065,4	1536,103105	1656,51324	1274,100823	1341,753934	1611,403112
5,79	2627,141	3574,309926	3356,615416	2065,4	1438,750871	1551,52988	1236,47713	1302,132472	1604,186754

Таблица 2

Ослабленности трещин Δ_N , Δ_V , Δ_H и Δ_T (т.е. $\Delta_T = (\Delta_V + \Delta_H)/2$)

Модель	Конц. Трещин, %	Δ_N	Δ_V	Δ_H	$\Delta_T = (\Delta_V + \Delta_H)/2$
VTI	0	0	0	0	0

Ort-1	2,78	0,27331838	0,21053153	0,18288887	0,1967102
Ort-2	3,54	0,31357722	0,28430727	0,29068559	0,28749643
Ort-3	4,39	0,38234322	0,34403647	0,34859237	0,34631442
Ort-4	5,74	0,4428413	0,43688252	0,4568443	0,44686341
Ort-5	5,79	0,47526081	0,50536626	0,52413975	0,51475301

Заметим, что для эталонного образца «VTI» (сланец без вертикальных трещин) мы тоже восстановили тензор упругости $\{C_{ij}^{VTI}\}$, включая его недостающую недиагональную компоненту C_{13}^{VTI} (что показано на Рис. 8(а) и в Таблице 1 при нулевой концентрации трещин); для этого мы использовали формулы для C_{13}^{VTI} в органических глинистых сланцах («organic mudrocks», Chichinina and Vernik, 2018).

Параметры Томсена ε и γ в орторомбической среде. Формула сложения «ORT=VTI+HTI»

Можно образно представить себе, что наша модель «ORT» для вертикально-трещиноватых сланцев построена по принципу «ORT=VTI+HTI», где «HTI» означает «эквивалентная модель HTI» для трещиноватой среды, а «VTI» – это трансверсально-изотропная модель (с вертикальной осью симметрии) для тонкослоистой породы, такой, как сланцы, представляющей фундамент породы «ORT» (Bakulin et al., 2000b). Простыми словами принцип сложения состоит в том, что порода «ORT» представлена как совокупность двух элементов: трансверсально-изотропной породы-фундамента (модель «VTI») и системы трещин («HTI»). Вопрос состоит в том, можно ли использовать эту мнемоническую формулу сложения «ORT=VTI+HTI» для вычисления параметров Томсена в орторомбической среде, то есть,

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI} + \varepsilon^{HTI}, \quad \gamma^{(2)} \approx \gamma^{VTI} + \gamma^{HTI}. \quad (9)$$

Бакулин с соавторами [Bakulin et al., 2000b] предлагают использовать эти формулы сложения (9), которые в их обозначениях имеют следующий вид:

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon_b + \varepsilon^{(V)}, \quad \gamma^{(2)} \approx \gamma_b + \gamma^{(V)}, \quad (10)$$

где ε_b и γ_b – это параметры Томсена ε и γ в сланцах (без трещин), выражающие их собственную полярную анизотропию «VTI», а $\varepsilon^{(V)}$ и $\gamma^{(V)}$ – это параметры Томсена ε и γ для среды «HTI», являющейся «эквивалентной» трансверсально-изотропной моделью породы с ориентированной вертикальной трещиноватостью (например, Bakulin et al., 2000a). Мы будем применять наши обозначения «VTI» и «HTI» (в качестве верхних индексов) для параметров Томсена ε , γ и δ соответственно в VTI-среде и HTI-среде: $\varepsilon^{VTI} \equiv \varepsilon_b$, $\gamma^{VTI} \equiv \gamma_b$, $\varepsilon^{HTI} \equiv \varepsilon^{(V)}$ и $\gamma^{HTI} \equiv \gamma^{(V)}$.

Таким образом, параметры Томсена ε^{VTI} и γ^{VTI} в сланцах (без трещин) выражают математически их собственную полярную анизотропию «VTI» и задаются следующими формулами согласно определению Томсена (Thomsen, 1986):

$$\varepsilon^{VTI} = \frac{C_{11}^{VTI} - C_{33}^{VTI}}{2C_{33}^{VTI}}; \quad \gamma^{VTI} = \frac{C_{66}^{VTI} - C_{44}^{VTI}}{2C_{44}^{VTI}}. \quad (11)$$

Компоненты VTI-тензора упругости $\{C_{ij}^{VTI}\}$ даны в Таблице 1 и на Рис. 8 при нулевой концентрации трещин. Полученные параметры Томсена ε^{VTI} и γ^{VTI} показаны на Рис. 9. Как известно (Bakulin et al., 2000b), параметры Томсена $\varepsilon^{(1)}$ и $\gamma^{(1)}$ (измеряемые в вертикальной плоскости yz орторомбической среды «ORT») можно приравнять к ε^{VTI} и γ^{VTI} , соответственно, что схематически показано на Рис. 9, а именно:

$$\varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon^{VTI}; \quad \gamma^{(1)} = \gamma^{VTI}. \quad (12)$$

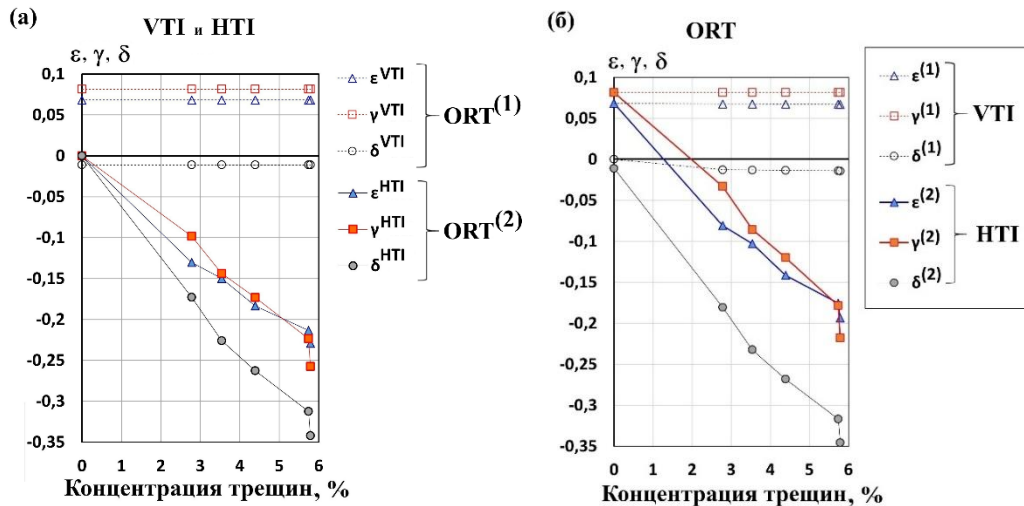


Рисунок 9. (а): Параметры Томсена ϵ , γ и δ для «эквивалентной» трещиноватой породы НТИ (ϵ^{HTI} , γ^{HTI} и δ^{HTI}) и в VTI-породе, представляющей собственную анизотропию сланцев (без трещин) (ϵ^{VTI} , γ^{VTI} и δ^{VTI}). (б): Параметры Томсена ϵ , γ и δ в орторомбической модели для вертикально-трещиноватых сланцев: $\epsilon^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ и $\delta^{(1)}$ в вертикальной плоскости yz (“плоскость трещин”), и $\epsilon^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$ и $\delta^{(2)}$ в вертикальной плоскости xz (“плоскость оси (x) симметрии”). Обозначения в фигурных скобках помогают понять взаимное соответствие параметров Томсена в разных моделях (VTI, HTI и ORT), выражаемое уравнениями (9) - (12).

Эквивалентная среда НТИ. Параметры Томсена ϵ^{HTI} и γ^{HTI} для “эквивалентной среды НТИ” (являющейся трансверсально-изотропной моделью Linear Slip породы с теми же ослаблениями трещин Δ_N и Δ_T , что и в модели ORT) определяются следующим образом (например, Bakulin et al, 2000a):

$$\epsilon^{HTI} = \frac{C_{11}^{HTI} - C_{33}^{HTI}}{2C_{33}^{HTI}}; \quad \gamma^{HTI} = \frac{C_{66}^{HTI} - C_{44}^{HTI}}{2C_{44}^{HTI}}, \quad (13)$$

где $\{C_{ij}^{HTI}\}$ — это компоненты тензора упругости эквивалентной среды НТИ, которые даны в Таблице 3 и на Рис. 10. Как известно (Bakulin et al, 2000a), в общем случае трансверсально-изотропная среда (НТИ и VTI) задаётся пятью независимыми компонентами тензора упругости $\{C_{11}^{HTI}, C_{33}^{HTI}, C_{44}^{HTI}, C_{66}^{HTI}, C_{13}^{HTI}\}$, причём $C_{22}^{HTI} = C_{33}^{HTI}$, $C_{55}^{HTI} = C_{66}^{HTI}$, $C_{12}^{HTI} = C_{13}^{HTI}$, и $C_{23}^{HTI} = C_{33}^{HTI} - 2C_{44}^{HTI}$.

В эквивалентной НТИ-модели Linear Slip (Schoenberg, Sayers, 1995), которую мы здесь используем, пятая компонента C_{13}^{HTI} теряет свою независимость, что следует из условия-ограничения на компоненту C_{13}^{HTI} для НТИ-модели Linear Slip: $C_{11}^{HTI}C_{33}^{HTI} - (C_{13}^{HTI})^2 = 2C_{44}^{HTI}(C_{11}^{HTI} + C_{13}^{HTI})$ (Bakulin et al. 2000a). Отсюда мы вывели следующую формулу для параметра Томсена δ^{HTI} в НТИ-среде:

$$\delta^{HTI} = \frac{1}{(1-g-2g\gamma)} [2g\gamma\sqrt{2\epsilon(1-2g) + (1-g)^2} + 2g(1-g)\gamma + (1-2g)\epsilon], \quad (14)$$

где $g = C_{44}^{HTI}/C_{33}^{HTI}$; и $C_{44}^{HTI} = \rho V_{S0}^2$, $C_{33}^{HTI} = \rho V_{P0}^2$.

Таблица 3:

Нормированные компоненты тензора упругости $\{C_{ij}^{HTI}\}$ для «эквивалентной» породы “НТИ”, пересчитанные в соответствующие скорости волн $\{V_{ij}^{ORT}\}$, м/с

Конц. Трещин, %	C11_НТИ	C22_НТИ	C33_НТИ	C44_НТИ	C55_НТИ	C66_НТИ	C13_НТИ	C12_НТИ	C23_НТИ
0 (ISO)	3641,403191	3641,403191	3641,403191	2227,3	2227,3	2227,3	1827,04313	1827,04313	1827,04313
2,78	3104,136827	3609,727891	3609,727891	2227,3	1996,249604	1996,249604	1557,47429	1557,47429	1763,06689
3,54	3016,925687	3605,038714	3605,038714	2227,3	1880,062295	1880,062295	1513,71685	1513,71685	1753,44619

4,39	2861,820406	3597,015007	3597,015007	2227,3	1800,790414	1800,790414	1435,89409	1435,89409	1736,88985
5,74	2718,054912	3589,941182	3589,941182	2227,3	1656,51324	1656,51324	1363,76097	1363,76097	1722,19252
5,79	2637,791828	3586,144743	3586,144743	2227,3	1551,52988	1551,52988	1323,48965	1323,48965	1714,26472

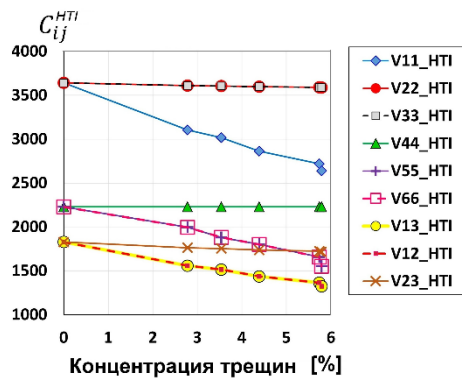


Рисунок 10. Компоненты тензора упругости $\{C_{ij}^{HTI}\}$ для «эквивалентной» трещиноватой породы НТИ (нормированные на единичную плотность), пересчитанные в соответствующие скорости волн $\{V_{ij}^{HTI}\}$ (размерность м/с), для шести различных концентраций трещин (включая нулевую концентрацию трещин, которая соответствует изотропной породе-фундаменту). При нулевой концентрации трещин среда НТИ превращается в изотропную.

Истинные (или же точные) параметры Томсена в орторомбической среде. Как оказалось, аппроксимация для $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$ в виде формулы сложения «ORT=VTI+HTI» (уравнения (9) - (10)) имеет довольно большое отклонение от истинных $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$, что будет подробно разобрано ниже. Здесь надо пояснить, что именно мы понимаем за истинный (или же точный) параметр Томсена. Объясним это на примере параметра Томсена $\varepsilon^{(2)}$. Истинный $\varepsilon^{(2)}$ можно выразить через ε^{VTI} и Δ_N , если в формулу-определение Томсена, $\varepsilon^{(2)} = (C_{11}^{ORT} - C_{33}^{ORT}) / (2C_{33}^{ORT})$, подставить выражения для соответствующих компонент тензора упругости, $C_{11}^{ORT} = C_{11}^{VTI} [1 - \Delta_N]$ и $C_{33}^{ORT} = C_{33}^{VTI} [1 - \Delta_N]$ (уравнение (3)). Численные значения компонент тензоров упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$, $\{C_{ij}^{VTI}\}$ и ослабленности трещин Δ_N даны в Табл. 1 и Табл. 2. Аналитическая формула для истинного $\varepsilon^{(2)}$ получается слишком длинная, поэтому здесь не приводится. В результате получаем (численно) истинный параметр $\varepsilon^{(2)}$, который показан на Рис. 11 красными сплошными треугольниками, т.е., пять значений $\varepsilon^{(2)}$ для пяти образцов пород с разными концентрациями трещин; причём шестое значение (оно же первое) при нулевой концентрации трещин соответствует ε^{VTI} .

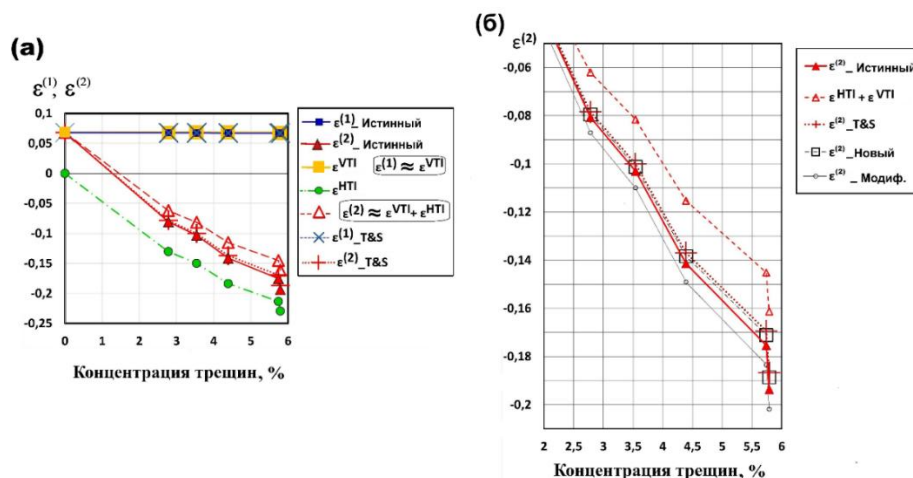


Рисунок 11. (а): Параметры Томсена $\varepsilon^{(2)}$ и $\varepsilon^{(1)}$ в орторомбической (ORT) модели. «T&S» – это результат по формулам Томсена-Сайерса (Thomsen, Sayers, 2022), уравнения (15) и (18), соответственно для $\varepsilon^{(2)}$ и $\varepsilon^{(1)}$. (б): Параметр Томсена $\varepsilon^{(2)}$. Сплошные красные треугольники ($\blacktriangle$) – это истинный $\varepsilon^{(2)}$ («Истинный»). Пустые красные треугольники ($\triangle$) – это формула

сложения « $\varepsilon^{VTI} + \varepsilon^{HTI}$ », уравнение (17). Красными крестиками (+) показана аппроксимация Томсена-Сайерса («T&S»), уравнение (15). Чёрными пустыми квадратиками (□) показана новая формула (16) (« $\varepsilon^{(2)}$ Новый»). Серые пустые точки (○) и серая линия – наша модифицированная формула (18) (« $\varepsilon^{(2)}$ Модиф.»).

Поскольку полученные аналитические формулы для истинных $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$ слишком громоздки, возникает идея заменить их какими-то укороченными понятными приближёнными формулами, которые бы несильно расходились с истинными параметрами Томсена. Ниже мы рассмотрим аппроксимации Томсена-Сайерса (Thomsen, Sayers, 2022) и другие приближённые формулы, а также сравним их с формулой сложения «ORT=VTI+HTI».

Приближённые формулы для $\varepsilon^{(2)}$

Воспользуемся формулой Томсена-Сайерса [Thomsen, Sayers, 2022] для $\varepsilon^{(2)}$:

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI} (1 + \Delta_N h) + \frac{\Delta_N}{2} \left[h - \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right], \quad (15)$$

где $h = (c_{13}^{VTI})^2 / (c_{11}^{VTI} c_{33}^{VTI})$. На Рис. 11 показан результат расчёта $\varepsilon^{(2)}$ по этой приближённой формуле (15); оказалось, что среднее отклонение от истинного $\varepsilon^{(2)}$ совсем небольшое, всего 3,2%. Мы немного улучшили эту формулу, пренебрегая в ней членом $\varepsilon^{VTI} \Delta_N h$, и получили:

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI} + \frac{\Delta_N}{2} \left[h - \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right]. \quad (16)$$

Эта улучшенная и более компактная формула даёт среднюю ошибку в определении $\varepsilon^{(2)}$ всего 2,1%; повышение точности новой формулы (16) (по сравнению с уравнением (15)) можно заметить на Рис. 11 (график помечен чёрными пустыми квадратиками).

Предположим, что формулу для $\varepsilon^{(2)}$ можно упростить ещё больше, заменив в уравнении (16) второе слагаемое (т.е., $\frac{\Delta_N}{2} \left[h - \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right]$) на ε^{HTI} ; в результате получим:

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI} + \varepsilon^{HTI}, \quad (17)$$

$$\text{где } \varepsilon^{HTI} = -2g(1 - g)\Delta_N, \quad (18)$$

и где $g = \mu / (\lambda + 2\mu)$, а λ и μ — это модули Ламе в изотропной среде, «ближайшей к НТИ» (Bakulin et al., 2000-ORT). Таким образом, получилась формула сложения «ORT=VTI+HTI» для $\varepsilon^{(2)}$, уравнение (17). Однако такое сильное упрощение формулы для $\varepsilon^{(2)}$ приводит к большой ошибке 19.3%, что уже выходит за пределы допустимого порога точности; как это видно на Рис.11. Чтобы как-то ещё упростить формулу для $\varepsilon^{(2)}$ (в частности второе слагаемое $\frac{\Delta_N}{2} \left[h - \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right]$ в уравнении (16), мы попробовали немного модифицировать её, и получилась следующая приближённая формула,

$$\varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI} - \frac{\Delta_N}{2} \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} = \varepsilon^{VTI} (1 - \Delta_N) - \frac{\Delta_N}{2}, \quad (19)$$

она даёт довольно хорошую точность (график с пометкой «Модиф.» на Рис. 11) с относительной погрешностью 5.8 %; но эта погрешность всё же больше, чем у формулы (16) («Новый» на Рис.11).

Приближённые формулы для $\varepsilon^{(1)}$

Рассмотрим следующую приближённую формулу для $\varepsilon^{(1)}$ (Thomsen, Sayers, 2022):

$$\varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon^{VTI} (1 + \Delta_N h) + \frac{\Delta_N}{2} \left[h - G^2 \frac{c_{11}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right], \quad (20)$$

где $G = C_{12}^{VTI}/C_{11}^{VTI}$. На Рис. 11 показан результат вычисления $\varepsilon^{(1)}$ по формуле (20) Томсена-Сайерса; график $\varepsilon^{(1)}$ обозначен “T&S”, и он просто совпадает с истинным $\varepsilon^{(1)}$, т.е. среднее отклонение “T&S” от истинного $\varepsilon^{(1)}$ составляет всего 0,03 %. Однако формула (20) выглядит слишком длинной, и в ней не виден её «физический смысл», поэтому взамен её рассмотрим совсем короткую аппроксимацию

$$\varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon^{VTI}, \quad (21)$$

которую предложили авторы статьи (Bakulin et al., 2000b), и которая в их обозначениях имеет вид: $\varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon_b$. Эта короткая формула (21) получается из уравнения (20) в предположении о слабой VTI-анизотропии сланцев, т.е., тогда получается, что: $G \approx \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$, $G^2 \frac{C_{11}^{VTI}}{C_{33}^{VTI}} \approx \frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}$, и $[h - G^2 \frac{C_{11}^{VTI}}{C_{33}^{VTI}}] \rightarrow 0$. Предполагая, что первый член $(\varepsilon^{VTI} \Delta_N h)$ в уравнении (20) также стремится к нулю, можно получить искомую краткую формулу (21) из Bakulin et al. (2000b),

$$\varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon^{VTI} \equiv \varepsilon_b. \quad (22)$$

Как показано на Рис. 11, графики « ε^{VTI} » и «истинный $\varepsilon^{(1)}$ » фактически совпадают: в среднем отклонение ε^{VTI} от истинного $\varepsilon^{(1)}$ составляет всего 1,2%.

Параметры Томсена $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ в орторомбической модели

По определению (уравнение (5)) выведем аналогичные формулы для параметров Томсена $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, которые описывают анизотропию поперечных волн в орторомбической среде (в вертикальных плоскостях yz и xz, соответственно), и в которые входят следующие компоненты тензора упругости C_{44}^{ORT} , C_{55}^{ORT} и C_{66}^{ORT} . Выпишем эти компоненты тензора $\{C_{ij}^{ORT}\}$ согласно уравнению (3):

$$C_{44}^{ORT} = C_{44}^{VTI}; \quad C_{55}^{ORT} = C_{44}^{VTI}[1 - \Delta_V]; \quad C_{66}^{ORT} = C_{66}^{VTI}[1 - \Delta_H]. \quad (23)$$

Начнём с параметра Томсена $\gamma^{(1)}$,

$$\gamma^{(1)} = \frac{C_{66}^{ORT} - C_{55}^{ORT}}{2C_{44}^{ORT}} = \frac{C_{66}^{VTI} - C_{44}^{VTI} - C_{66}^{VTI}\Delta_H + C_{44}^{VTI}\Delta_V}{2C_{44}^{VTI}(1 - \Delta_V)}. \quad (24)$$

Учитывая, что $\gamma^{VTI} = (C_{66}^{VTI} - C_{44}^{VTI})/(2C_{44}^{VTI})$, где γ^{VTI} – это параметр Томсена γ , характеризующий внутреннюю «полярную» анизотропию сланцев (т.е. «VTI»), получаем для $\gamma^{(1)}$ следующую точную формулу:

$$\gamma^{(1)} = (\gamma^{VTI} + 1/2) + \frac{1 - \Delta_H}{1 - \Delta_V} - 1/2. \quad (25)$$

Затем, домножив числитель и знаменатель дроби на $(1 + \Delta_V)$ и полагая, что $\Delta_V^2 \rightarrow 0$, $\Delta_H \Delta_V \rightarrow 0$, $\gamma^{VTI} \Delta_V \rightarrow 0$, $\gamma^{VTI} \Delta_H \rightarrow 0$, формула (25) преобразуется к виду (Bakulin et al. 2000b; Tomsen, Sayers, 2022):

$$\gamma^{(1)} \approx \gamma^{VTI} + \frac{\Delta_V - \Delta_H}{2}. \quad (26)$$

Для $\gamma^{(2)}$ получается следующая точная формула (без всяких приближений) (Tomsen, Sayers, 2022):

$$\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI}(1 - \Delta_H) - \frac{\Delta_H}{2}. \quad (27)$$

По данным физического моделирования получается, что две поперечные ослабленности Δ_V и Δ_H примерно равны друг другу (как это показано на Рис. 8(б)), и поэтому мы их заменяем одной средней арифметической величиной Δ_T , т.е., $\Delta_V = \Delta_H = \Delta_T$ (где $\Delta_T = (\Delta_V + \Delta_H)/2$). Тогда формулы (25) и (27) сводятся к следующим:

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{VTI}; \quad (28)$$

$$\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI}(1 - \Delta_T) - \frac{\Delta_T}{2}. \quad (29)$$

Заметим, что обе эти формулы для $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, уравнения (28) и (29), являются точными, а не приближёнными. Действительно, формула (28) для $\gamma^{(1)}$ является *точной*, так как она следует из *точной* формулы (25), если приравнять в ней Δ_V и Δ_H (потому что $\Delta_V = \Delta_H = \Delta_T$ по результатам лабораторного эксперимента). Заметим, что впервые эта формула $\gamma^{(1)} = \gamma^{VTI}$ была опубликована Бакулиным с соавторами (Bakulin et al., 2000b). Формула (29) для $\gamma^{(2)}$, т.е. $\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI}(1 - \Delta_T) - \frac{\Delta_T}{2}$, тоже является *точной* а не приближённой, потому что она получена из *точной* формулы (27) при подстановке в неё Δ_T вместо Δ_H (так как $\Delta_T = \Delta_H$); формула (27) впервые была опубликована у Томсена с Сайерсом (Tomsen, Sayers, 2022).

Интересно, что для $\gamma^{(1),(2)}$ и $\varepsilon^{(1),(2)}$ можно записать следующие единообразные формулы:

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{VTI}; \quad \varepsilon^{(1)} \approx \varepsilon^{VTI}; \quad (30)$$

$$\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI}(1 - \Delta_T) - \frac{\Delta_T}{2}; \quad \varepsilon^{(2)} \approx \varepsilon^{VTI}(1 - \Delta_N) - \frac{\Delta_N}{2}. \quad (31)$$

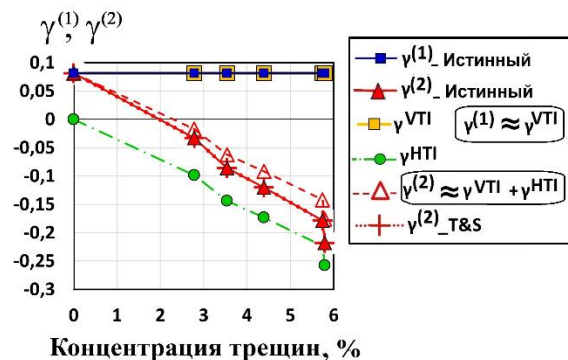


Рисунок 12. Параметры Томсена $\gamma^{(2)}$ и $\gamma^{(1)}$ в орторомбической («ORT») модели. Формула сложения « $\gamma^{VTI} + \gamma^{HTI}$ » даёт большое отклонение (28%) от истинного параметра $\gamma^{(2)}$. Тогда как формула Томсена-Сэйерса «T&S» имеет нулевое отклонение 0%, потому что она точная (уравнение (29)).

Формула сложения «VTI+HTI» для $\gamma^{(2)}$

Формулу сложения « $\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI} + \gamma^{HTI}$ » можно получить из уравнения (29), если заменить в нём слагаемое $(-\Delta_T/2)$ на γ^{HTI} в соответствии со следующей формулой (Bakulin et al., 2000a):

$$\gamma^{HTI} = -\frac{\Delta_T}{2}, \quad (32)$$

где γ^{HTI} – это параметр Томсена γ в “эквивалентной” среде НТИ (Bakulin et al., 2000b); в обозначениях авторов упомянутых статей эта формула записывается следующим образом: $\gamma^{(V)} = -\frac{\Delta_T}{2}$. Таким образом, согласно равенству (32), формула (29) преобразуется в следующую:

$$\gamma^{(2)} = \gamma^{VTI} + \gamma^{HTI} + 2\gamma^{HTI}\gamma^{VTI}. \quad (33)$$

Если пренебречь членом $2\gamma^{HTI}\gamma^{VTI}$ в уравнении (33), то получается *приближённая* формула сложения «ORT=VTI+HTI», то есть,

$$\gamma^{(2)} \approx \gamma^{VTI} + \gamma^{HTI}. \quad (34)$$

Однако эта формула даёт большое расхождение в 23% с истинным $\gamma^{(2)}$, как можно видеть на Рис.12. Поэтому мы рекомендуем всё-таки использовать точные формулы (33) и/или (29).

$\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$ в модели ORT

Параметр Томсена $\delta^{(2)}$. Наконец, рассмотрим формулу сложения для $\delta^{(2)}$, о которой мы уже упоминали во Введении (уравнение (2)), т.е.

где

$$\delta^{(2)} \approx \delta^{VTI} + \delta^{HTI}, \quad (35)$$

$$\delta^{VTI} = \frac{(C_{13}^{VTI} + C_{55}^{VTI})^2 - (C_{33}^{VTI} - C_{55}^{VTI})^2}{2C_{33}^{VTI}(C_{33}^{VTI} - C_{55}^{VTI})}, \quad (36)$$

$$\delta^{HTI} = \frac{(C_{13}^{HTI} + C_{55}^{HTI})^2 - (C_{33}^{HTI} - C_{55}^{HTI})^2}{2C_{33}^{HTI}(C_{33}^{HTI} - C_{55}^{HTI})}. \quad (37)$$

В Таблицах 1 и 2 приведены компоненты тензоров ORT, VTI и HTI, т.е., $\{C_{ij}^{ORT}\}$, $\{C_{ij}^{VTI}\}$ и $\{C_{ij}^{HTI}\}$. Подставляя компоненты орторомбического тензора упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$ в уравнение-определение параметра Томсена $\delta^{(2)}$, т.е.

$$\delta^{(2)} = \frac{(C_{13}^{ORT} + C_{55}^{ORT})^2 - (C_{33}^{ORT} - C_{55}^{ORT})^2}{2C_{33}^{ORT}(C_{33}^{ORT} - C_{55}^{ORT})}, \quad (38)$$

получаем его *истинное* значение « $\delta^{(2)}$ -Истинный», которое так и обозначено на Рис. 13. Интересно, что формула $\delta^{(2)} \approx \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$, уравнение (35), очень точно предсказывает искомый параметр $\delta^{(2)}$, а именно, средняя относительная разница с истинным $\delta^{(2)}$ составляет всего 2%. Более того, формула «ORT=VTI+HTI» для $\delta^{(2)}$ оказывается намного точнее, чем следующая формула Томсена-Сайерса (Tomsen, Sayers, 2022):

$$\delta^{(2)} \approx \delta^{VTI} + \Delta_N h - \Delta_N \frac{C_{13}^{VTI}}{C_{33}^{VTI}} - 2\Delta_T \frac{C_{44}^{VTI}}{C_{33}^{VTI}}. \quad (39)$$

Как это видно на Рис. 13(б), эта формула Томсена-Сайерса плохо работает (т.е. средняя относительная разница с истинным $\delta^{(2)}$ составляет 28%) в отличие от формулы сложения $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$ (уравнение (35)).

Таким образом, без каких-либо сложных предварительных вычислений орторомбического тензора упругости $\{C_{ij}^{ORT}\}$, мы имеем возможность точно вычислить параметры Томсена $\delta^{(2)}$ и $\delta^{(1)}$, используя формулу сложения $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$ (уравнение (35)), причём $\delta^{VTI} = \delta^{(1)}$. (Как будет показано ниже, равенство $\delta^{(1)} = \delta^{VTI}$ тоже подтвердилось.)

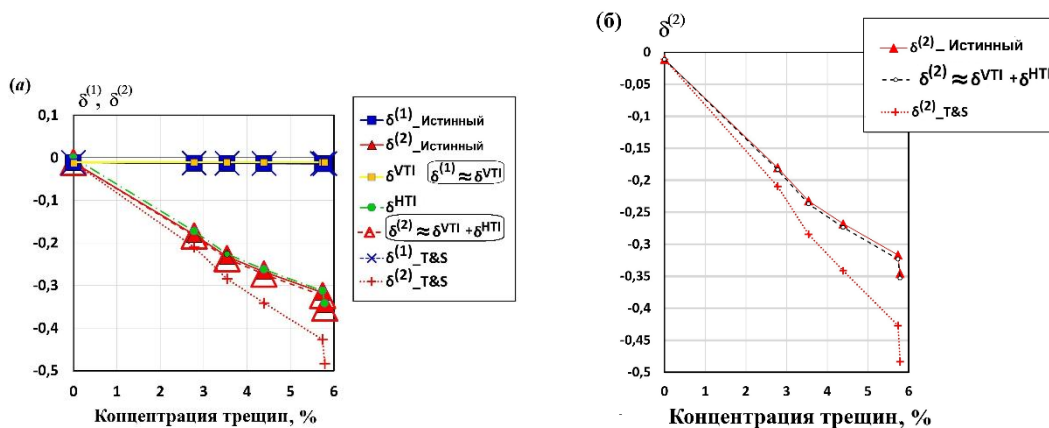


Рисунок 13. (а): Параметры Томсена $\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$ в модели ORT. Все обозначения точно такие же, как на Рис. 11-12. (б): Истинный параметр $\delta^{(2)}$ и полученный по формуле сложения, $\delta^{(2)} \approx \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$, практически совпадают. Для сравнения показано приближение Томсена - Сайерса " $\delta^{(2)}$ -T&S, которое сильно отклоняется от истинного $\delta^{(2)}$.

Интересно, что тенденция поведения $\delta^{(2)}$ отличается от таковой для $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$, потому что истинный $\delta^{(2)}$ практически оказывается равным теоретическому, полученному по формуле сложения ("ORT=VTI+HTI"), т.е. $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$. Тогда как формула сложения "ORT=VTI+HTI", строго говоря, не работает для $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$.

Параметр Томсена $\delta^{(1)}$. Приближённая формула Томсена-Сайерса для $\delta^{(1)}$ выглядит следующим образом (Tomsen, Sayers, 2022) :

$$\delta^{(1)} \approx \delta^{VTI} + \Delta_N \left(h - G \frac{c_{13}^{VTI}}{c_{33}^{VTI}} \right). \quad (40)$$

Как показано на Рис. 13, график « $\delta^{(1)}$ _T&S» (по формуле Томсена-Сайерса) фактически совпадает с истинным $\delta^{(1)}$, то есть мы получили очень малую абсолютную погрешность 0,0002. В уравнении (40), учитывая малость второго члена (по сравнению с первым) и пренебрегая им, получаем

$$\delta^{(1)} \approx \delta^{VTI}. \quad (41)$$

Рис. 13 показывает, что эта формула $\delta^{(1)} = \delta^{VTI}$ работает очень хорошо, т.е. график истинного $\delta^{(1)}$ и δ^{VTI} в эталонном VTI-образце практически совпадают, $\delta^{(1)} = \delta^{VTI}$. Абсолютная погрешность этого приближения составляет примерно 0,002.

Выводы

Формула сложения «ORT=VTI+HTI» помогает нам напрямую (без сложных предварительных вычислений) предсказать знак и приблизительную величину искомого параметра Томсена в трещиноватых сланцах (т. е., $\varepsilon^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$ и $\delta^{(2)}$). Формула «ORT=VTI+HTI» хоть и неточная (для $\varepsilon^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$), но наглядная: она показывает, почему знак результирующего параметра анизотропии орторомбической среды (т.е. $\varepsilon^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$ и $\delta^{(2)}$) меняется с «плюса» на «минус» в вертикально-трещиноватых сланцах. Например, в VTI сланцах *без трещин* параметр Томсена ε имел знак «плюс» (т. е. $\varepsilon^{VTI} > 0$ при нулевой концентрации трещин на Рис. 11). Однако в *трещиноватых* сланцах этот параметр ε (измеренный в плоскости xz) «трансформируется» в $\varepsilon^{(2)}$, и его знак меняется на «минус» (т.е. $\varepsilon^{(2)} < 0$). То же самое относится и к $\gamma^{(2)}$, и к $\delta^{(2)}$. Это объясняется тем, что азимутальная анизотропия сильно влияет на величину и знак итогового параметра Томсена (т.е. $\varepsilon^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$ и $\delta^{(2)}$ в среде "ORT") на основе решающего вклада отрицательного параметра Томсена (ε^{HTI} , γ^{HTI} и δ^{HTI}), характеризующего эквивалентную среду HTI.

Итак, для ε и γ в орторомбической среде «ORT» имеют место следующие единообразные формулы:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &\approx \varepsilon^{VTI}; & \gamma^{(1)} &= \gamma^{VTI}; \\ \varepsilon^{(2)} &\approx \varepsilon^{VTI}(1 - \Delta_N) - \frac{\Delta_N}{2}; & \gamma^{(2)} &= \gamma^{VTI}(1 - \Delta_T) - \frac{\Delta_T}{2}. \end{aligned}$$

Что касается формулы сложения «ORT=VTI+HTI» для $\varepsilon^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$, то она, строго говоря, не выполняется, тогда как для параметра $\delta^{(2)}$ всё обстоит по-другому: формула сложения работает лучше, чем все известные нам приближения. А именно, мы сравнили формулу сложения $\delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}$ с формулой Томсена-Сайерса, и оказалось, что последняя даёт гораздо большую ошибку. Таким образом, в заключение, для параметров $\delta^{(2)}$ и $\delta^{(1)}$ мы рекомендуем следующие аппроксимационные формулы:

$$\delta^{(1)} \approx \delta^{VTI}; \quad \delta^{(2)} = \delta^{VTI} + \delta^{HTI}.$$

Благодарности

Мы благодарим Мексиканский институт нефти («Instituto Mexicano del Petroleo (IMP)») за поддержку, номер проекта G.72040.

Список литературы

1. Thomsen L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*. 1986; 51: P. 1954–1966. <https://doi.org/10.1190/1.1442051>
2. Grechka V., Tsvankin I. 3-D description of normal moveout in anisotropic inhomogeneous media. *Geophysics*. 1998; 63: P. 1079-1092. <https://doi.org/10.1190/1.1444386>

3. Chichinina T., Mankenov O., Bezkhodarnov V., Avila-Carrera R. Seismic Anisotropy Parameter δ for Fractured Reservoir Characterization Including Gas Saturation. In: Lin, J. (eds). *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2024. IFEDC 2024. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering (SSGG)*. Springer, Singapore. P. 129-137. 2025a. https://doi.org/10.1007/978-981-96-2363-1_10
4. Горшкалев С.Б., Карстен В.В., Афонина Е.В., Бекешко П.С., Корсунов И.В. Результаты изучения азимутальной анизотропии геологического разреза на Пеляткинской площади по данным многоволнового ВСП и сейсморазведки 3D. *Технологии сейсморазведки*. 2011; 3: С. 60–70.
5. Чичинина Т.И., Детков В.А., Манкенов О.К. Анизотропная модель «ОРТ» для газонасыщенных трещиноватых пород. *Сборник материалов конференции. «Тюмень-2024 - Актуальные тренды научно-технологического развития нефтегазовой отрасли*. Геомодель. Россия, Тюмень. 23-27 сентября 2024 г. С. 24-27. 2024a.
6. Чичинина Т.И., Безходарнов В.В., Манкенов О.К. Параметр анизотропии δ как индикатор газонасыщенности трещиноватых коллекторов. *Сборник материалов конференции. «Геомодель 2024» – «26-я юбилейная научно-практическая конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа»*. Россия, Геленджик. 9-12 сентября 2024. С.114-118. 2024b.
7. Чичинина Т.И., Авила-Каррера Р., Мартюшев Д.А. Анизотропия сланцев: орторомбическая модель. *Сборник материалов конференции «Наука о сланцах '25. Новые данные»*. Москва, Россия, 7-8 апреля 2025 г. 2025b.
8. Chichinina T., Vernik L. Physical bounds on C_{13} and anisotropy parameter δ for organic mudrocks. *Geophysics*. 2018; 83 (5): P. A75-A79. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0035.1>
9. Vernik L. Seismic Petrophysics in Quantitative Interpretation. *Publisher: Society of Exploration Geophysicists (SEG)*. Pages: 226. 2016. <https://doi.org/10.1190/1.9781560803256>
10. Bakulin A., Grechka V., and Tsvankin I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part I: HTI model due to a single fracture set. *Geophysics*. 2000a; 65 (6): P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1190/1.1444863>
11. Vernik L., Liu X. Velocity anisotropy in shales: a petrophysical study. *Geophysics*. 1997; 62: P. 521-532. <https://doi.org/10.1190/1.1444162>
12. Chesnokov E.M., Tiwary D.K., Bayuk I.O., Sparkman M.A. and Brown R.L. Mathematical modelling of anisotropy of illite-rich shale. *Geophysical Journal International*. 2009; 178(3): P.1625–1648. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2009.04244.x>
13. Bayuk I.O., Ammerman M., Chesnokov E.M. Elastic moduli of anisotropic clay. *Geophysics*. 2007; 72(5): P. D107-D117. <https://doi.org/10.1190/1.2757624>
14. Crampin S. and Lovel J.H. A decade of shear-wave splitting in the Earth's crust: what does it mean? what use can we make of it? and what should we do next? *Geophysical Journal International*. 1991; 107: P. 387-407. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb01401.x>
15. Кашубин С.Н. Сейсмическая анизотропия и эксперименты по ее изучению на Урале и Восточно-Европейской платформе. *Екатеринбург: УрО РАН*; 2001. . ISBN 5-7691-1173-9
16. Schoenberg M., and Helbig K. Orthorhombic media: modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*. 1997; 62: P. 1954–1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>
17. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *Journal of Acoustical Society of America*. 1980; 68: P. 1516–1521. <https://doi.org/10.1121/1.385077>
18. Bakulin A., Grechka V., and Tsvankin I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry. *Geophysics*. 2000b; 65(6): P. 1803–1817. <https://doi.org/10.1190/1.1444864>

19. Silva C., de Figueiredo J.J.S., Chichinina T., Nascimento M.J., Kirchhof L. Experimental characterization of synthetic porous orthorhombic fractured medium: A physical modeling approach. *Ultrasonics*. 2019; 94: P. 82-91. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2018.11.015>
20. Thomsen L., and Sayers C. Anisotropy parameters for fractured shales. *Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy. Society of Exploration Geophysicists (SEG) and the American Association of Petroleum Geologists (AAPG)*. P. 150-154. 2022.
21. Chichinina T., De Figueiredo J.J.S., Bulgakov I., Avila-Carrera R. Anisotropy Models and Parameters of Fractured Rocks by Physical Modeling Data. In: J. Lin (Ed.). *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering (SSGG)*. Springer Nature. P. 1027–1036; 2024c. https://doi.org/10.1007/978-981-97-0468-2_81
22. Chichinina T. Physical constraints on C_{13} for transversely isotropic shales and their applications. *Geophysics*. 2017; 82(4): P. WA105-WA118. <https://doi.org/10.1190/geo2016-0656.1>
23. Schoenberg M., Sayers C. M. Seismic anisotropy of fractured rock. *Geophysics*. 1995; 60: P. 204–211. <https://doi.org/10.1190/1.1443748>

References

1. Thomsen L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*. 1986; 51: P. 1954–1966. <https://doi.org/10.1190/1.1442051>
2. Grechka V., Tsvankin I. 3-D description of normal moveout in anisotropic inhomogeneous media. *Geophysics*. 1998; 63: P. 1079-1092. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0035.1>
3. Chichinina T., Mankenov O., Bezhodarnov V., Avila-Carrera R. Seismic Anisotropy Parameter δ for Fractured Reservoir Characterization Including Gas Saturation. In: Lin, J. (eds). *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2024. IFEDC 2024. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering (SSGG)*. Springer, Singapore. P. 129-137. 2025a. https://doi.org/10.1007/978-981-96-2363-1_10
4. Gorshkalev S.B., Karsten V.V., Afonina Ye.V., Bekeshko P.S., Korsunov I.V. [Results of studying the azimuthal anisotropy of the subsurface at Pelyatkinsky area from multiwave VSP and seismic 3D data.] *Tekhnologii seismorazvedki*. 2011; 3: P. 60–70. [In Russ.]
5. Chichinina T.I., Detkov V.A., Mankenov O.K. [Anisotropic model "ORT" for gas-saturated fractured rocks.] *Conference Proceedings "Tyumen'-2024. Aktual'nyye trendy nauchno-tekhnologicheskogo razvitiya neftegazovoy otrasli."* Russia, Tyumen. September 23-27, 2024. P. 24-27. 2024a [In Russ.]
6. Chichinina T.I., Bezhodarnov V.V., Mankenov O.K. Anisotropy parameter δ as an indicator of gas saturation of fractured reservoirs. *Conference Proceedings. "Geomodel' 2024" – "26-ya yubileynaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya po voprosam geologorazvedki i razrabotki mestorozhdeniy nefti i gaza"*. Russia, Gelendzhik, September 9-12, 2024. P.114-118. 2024b. [In Russ.]
7. Chichinina T.I., Avila-Carrera R., Martyushev D.A. Shale anisotropy: an orthorhombic model. *Conference Proceedings. "Nauka o slantsakh '25. Novyye dannyye."* Moscow, Russia, April 7-8, 2025. 2025b. [In Russ.]
8. Chichinina T., Vernik L. Physical bounds on C_{13} and anisotropy parameter δ for organic mudrocks. *Geophysics*. 2018; 83 (5): P. A75-A79. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0035.1>
9. Vernik L. Seismic Petrophysics in Quantitative Interpretation. *Publisher: Society of Exploration Geophysicists (SEG)*. Pages: 226. 2016. <https://doi.org/10.1190/1.9781560803256>

10. Bakulin A., Grechka V., and Tsvankin I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part I: HTI model due to a single fracture set. *Geophysics*. 2000a; 65 (6): P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1190/1.1444863>
11. Vernik L., Liu X. Velocity anisotropy in shales: a petrophysical study. *Geophysics*. 1997; 62: P. 521-532. <https://doi.org/10.1190/1.1444162>
12. Chesnokov E.M., Tiwary D.K., Bayuk I.O., Sparkman M.A. and Brown R.L. Mathematical modelling of anisotropy of illite-rich shale. *Geophysical Journal International*. 2009; 178(3): P.1625–1648. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2009.04244.x>
13. Bayuk I.O., Ammerman M., Chesnokov E.M. Elastic moduli of anisotropic clay. *Geophysics*. 2007; 72(5): P. D107-D117. <https://doi.org/10.1190/1.2757624>
14. Crampin S. and Lovel J.H. A decade of shear-wave splitting in the Earth's crust: what does it mean? what use can we make of it? and what should we do next? *Geophysical Journal International*. 1991; 107: P. 387-407. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb01401.x>
15. Kashubin S.N. [Seismic anisotropy and experiments on the anisotropy study in the Urals and the East European platform.] *Yekaterinburg. UrO RAN*. 2001. [In Russ.]
16. Schoenberg M., and Helbig K. Orthorhombic media: modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*. 1997; 62: P. 1954–1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>
17. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *Journal of Acoustical Society of America*. 1980; 68: P. 1516–1521. <https://doi.org/10.1121/1.385077>
18. Bakulin A., Grechka V., and Tsvankin I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry. *Geophysics*. 2000b; 65(6): P. 1803–1817. <https://doi.org/10.1190/1.1444864>
19. Silva C., de Figueiredo J.J.S., Chichinina T., Nascimento M.J., Kirchhof L. Experimental characterization of synthetic porous orthorhombic fractured medium: A physical modeling approach. *Ultrasonics*. 2019; 94: P. 82-91. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2018.11.015>
20. Thomsen L., and Sayers C. Anisotropy parameters for fractured shales. *Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy. Society of Exploration Geophysicists (SEG) and the American Association of Petroleum Geologists (AAPG)*. P. 150-154. 2022.
21. Chichinina T., De Figueiredo J.J.S., Bulgakov I., Avila-Carrera R. Anisotropy Models and Parameters of Fractured Rocks by Physical Modeling Data. In: J. Lin (Ed.). *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering (SSGG)*. Springer Nature. P. 1027–1036. 2024c. https://doi.org/10.1007/978-981-97-0468-2_81
22. Chichinina T. Physical constraints on C_{13} for transversely isotropic shales and their applications. *Geophysics*. 2017; 82(4): P. WA105-WA118. <https://doi.org/10.1190/geo2016-0656.1>
23. Schoenberg M., and Sayers C. M. Seismic anisotropy of fractured rock. *Geophysics*. 1995; 60: P. 204–211. <https://doi.org/10.1190/1.1443748>